Cours de Microéconomie IV: Équilibre général

Inspiré du cours de H. Polemarchakis

Mai 2003

Le thème central de ce cours est l'équilibre général, mais celui-ci va être envisagé en mettant un accent particulier sur l'économie du bien-être.

Table des matières

Première partie
Théorie classique de l'équilibre général

1 Les deux théorèmes de l'économie du bien-être

1.1 Cadre du modèle

Soit une économie composée de :
- $i \in [\![1, I]\!]$ individus ;
- $l \in [\![1, L]\!]$ biens ;
- les individus sont caractérisés par leurs fonctions d'utilité $u^i = u^i(x_1^i, \ldots, x_L^i)$ une fonction d'utilité ordinale définie sur tous les paniers de biens envisageables pour $i : x^i \in (X^i)$;
- une dotation initiale biens $e = (e_1, \ldots, e_L)$.

Cette description de l'économie recouvre deux hypothèses de modélisation :

Hypothèse 1.1. Il y a un nombre fini d'individus.

Hypothèse 1.2. Il y a un nombre fini de biens.

Ces deux hypothèses sont importantes, car les preuves de plusieurs théorèmes dans ce qui suit tombent quand on considère un nombre infini de biens ou d'individus. Or, l'hypothèse de finitude des biens est très discutable si on considère des biens différentiés par leur localisation géographique ou leur disponibilité dans le temps. Ces réserves seront examinées en seconde partie.

En revanche, on peut remarquer qu'on n'a fait aucune hypothèse sur la manière dont la dotation initiale en biens est attribuée. En particulier, on n'a postulé aucune structure de propriété.

Définition 1.1 (Allocation réalisable). Une allocation $\vec{X} = (x^1, \ldots, x^I)$,$x^i \in (X)^i$ est un vecteur de longueur IL.

Une allocation est dite réalisable si $\sum_i x^i = e$

Remarque. Souvent, cette définition est remplacée par la formulation suivante : $\sum_i x_i \leqslant e$. Cette dernière implique qu'on peut librement et surtout sans coût se débarasser des biens dont on ne veut pas. Elle fait également des hypothèse sur la forme des fonctions d'utilité.

Hypothèse 1.3. Il exite une allocation réalisable.

Cette hypothèse signifie qu'il existe au moins une allocation telle que tous les individus disposent du minimum vital. Sans elle, tout ce qui suit n'a pas grand sens.

1.2 Pareto-optimalité

1.2.1 Définitions

Définition 1.2 (Pareto-supériorité). Une allocation $\vec{X}$ est Pareto-supérieure (on dit aussi Pareto-domine) une allocation $\vec{X}'$ si :

$$\begin{array}{rcl} \forall i, u^i(x^i) & \geqslant & u^i(x^{i\prime}) \\ \exists j, u^j(x^j) & > & u^j(x^{j\prime}) \end{array}$$

On dit qu'elle est strictement Pareto-supérieure si :

$$\forall i, u^i(x^i) > u^i(x^{i\prime})$$

Définition 1.3 (Pareto-optimalité). L'allocation $\vec{X}$ est dite Pareto optimale s'il n'existe pas d'allocation réalisable qui lui soit Pareto supérieure.

L'allocation $\vec{X}$ est dite faiblement Pareto optimale s'il n'existe pas d'allocation réalisable qui lui soit strictement Pareto supérieure.

1.2.2 Existence

Théorème 1.1 (Existence d'une allocation Pareto-optimale). *Si les u^i sont continues sur l'ensemble F des allocations réalisables, et si F est compact, alors il existe une allocation Pareto-optimale.*

La démonstration de cette proposition repose sur le résultat suivant :

Rappel. *Si g est une fonction continue sur un compact C, alors elle est bornée et atteint ses bornes sur C. En particulier, elle admet un maximum sur C.*

Ainsi, faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1.4. Les u^i sont continues sur F

Hypothèse 1.5. $\forall i, X^i$ est fermé et borné par en bas.

Alors, on a le résultat suivant :

Proposition 1.2. *L'ensemble F des allocations réalisables est un compact.*

Démonstration. L'hypothèse (1.5) permet de dessiner F comme une boîte d'Edgeworth en dimension 2. En dimension I, la démonstration est la même. ∎
On remarque que cette démonstration tombe si I ou L sont infinis.

On peut maintenant faire la démonstration de l'existence d'une allocation Pareto-optimale :

Allocation faiblement Pareto-optimale. Je considère $\max_{X \in F}\{u^1(x^1\}$, dont je sais qu'il existe. Notons $F^1 \subset F$ les solutions de ce problème. Comme F^1 est aussi un compact, je peux considérer $\max_{X \in F^1}\{u^2(x^2\}$. Par récurrence, j'obtiens une allocation faiblement Pareto-optimale. ∎

Allocation strictement Pareto-optimale. On peut obtenir une allocation strictement pareto-optimale en réalisant le programme suivant : $max_{X \in F}\{\sum_i \alpha^i u^i(x^i)\}$, $\forall i,\ \alpha^i > O$. Si $\forall i, \alpha^i \geqslant 0$ et $\exists j, \alpha^j > 0$, on obtient une allocation faiblement Pareto-optimale. ∎

Théorème 1.3. *Si* $\forall i$, u^i *est concave, alors, pour toute allocation* $\vec{X}^*$ *Pareto-optimale, il exite* $\alpha^1, \ldots, \alpha^I, \alpha^i \geqslant 0, \exists j, \alpha^j > 0$ *tels que* $\vec{X}^*$ *est solution de* $max_{X \in F}\{\sum_i \alpha^i u^i(x^i)\}$.

L'hypothèse de concavité des u^i pose de nombreux problèmes. En effet, les fonctions d'utilité sont censées n'être que des résumés pour les fonctions de préférence. Or, supposer la concavité des fonctions d'utilité revient non seulement à supposer la convexité des fonctions de préférence (ce qui est raisonnable), mais aussi à faire des hypothèses très forte sur la manière dont les fonctions de préférence croissent (ce qui est non seulement arbitraire, mais aussi contraire à l'idée que les fonctions de préférence ne sont que des fonctions ordinales). Pour plus de détails, voir le théorème de Sonnenschein.

1.3 Les deux théorèmes de l'économie du bien-être

1.3.1 Premier théorème

Modélisons une économie de marché : $\mathcal{E} = \{(u^i, e^i), i \in [\![1, \ldots, L]\!]\}$.

Soit un vecteur-prix $p = (p_1, \ldots, p_L)$. La valeur d'un panier de biens X est alors $pX = \sum_l p_l x_l$.

Définition 1.4 (Équilibre de marché). Un équilibre de marché est un couple $(p^*, \vec{X}^*)$ tel que :
- $\vec{X}^*$ est réalisable ($\sum_i x^i = \sum_i e^i$) ;
- $\forall i$, i est solution de $p^* x^i \leqslant p^* e^i$.

On remarque que les solutions individuelles ne sont pas nécessairement uniques, par exemple dans le cas où la plus haute courbe d'utilité est tangente à la droite de budget sur tout un segment. Le planificateur contral doit donc non seulement déterminer les prix d'équilibre, mais aussi discriminer entre les différentes solutions pour parvenir à un équilibre qui puisse être Pareto-optimal. L'équilibre de marché n'est donc pas aussi « décentralisable »que certains aiment à le dire.

Théorème 1.4 (Premier théorème de l'économie du bien-être). *Une allocation* $\vec{X}^*$ *résultant d'un équilibre de marché est faiblement Pareto-optimale.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\vec{X}'$ est un équilibre de marché tel que :
- $\vec{X}'$ est réalisable ;
- $\forall i, u^i(x^{i\prime}) > u^{i\prime}(x^{i*})$.

Alors, pour chaque individu i,
- x^{i*} est solution du programme $\max(u^i(x^i))$ sous la contrainte $p^* x^i \leqslant p^* e^i$;
- $u^i(x^{i\prime}) > u^i(x^{i*})$.

Donc $p^* x^{i\prime} > p^* e^i$.

Alors, $p^* \sum_i x^{i\prime} > p^* \sum_i e^i$, ce qui implique que $\vec{X}'$ n'est pas réalisable. Contradiction. ■

Remarque. Ce théorème semble très fort, car il ne demande aucune hypothèse particulière. En fait, ce résultat est conditionné par l'existence d'équilibres de marché, qui elle requiert des hypothèses très fortes sur la structure de l'économie considérée.

Le théorème dit que les allocations de marché sont seulement faiblement Pareto-optimales. En effet, si un agent a une zone d'indifférence qui recouvre l'équilibre de marché, il peut être possible de se déplacer dans cette zone d'indifférence pour améliorer la situation d'autres agents sans dégrader la sienne, et donc aboutir à une allocation Pareto-supérieure à l'équilibre de marché.

Définition 1.5 (Non-saturation locale). On dit que u^i définie sur (X^i) vérifie la non-saturation locale si :

$$\begin{aligned}&\forall x \in (X^i), \forall \epsilon > 0,\\ &\exists x' \in (X^i), u^i(x') > u^i(x) \text{ et } \|x' - x\| < \epsilon\end{aligned}$$

Proposition 1.5. *Sous l'hypothèse de non-saturation locale des fonctions d'utilité, le programme primal du consommateur est équivalent à son programme dual, c'est-à-dire que la maximisation de l'utilité sous contrainte de budget est équivalente à la minimisation des dépenses sous contrainte d'utilité.*

Démonstration. Supposons que X soit solution de $\max(u(X))$ sous la contrainte $pX \leqslant pe$.

Supposons : $\exists X', u^i(X') \geqslant u^i(X), pX' < pX$. La non-saturation locale nous dit que $\|\widetilde{X} - X\| < \epsilon \Rightarrow p\widetilde{X} \leqslant pX$. Or, $u^i(\widetilde{X}) > u^i(X') \geqslant u^i(X)$. Contradiction. ■

Théorème 1.6. *Si chaque individu vérifie la non-saturation locale, alors une allocation résultant d'un équilibre de marché est Pareto-optimale.*

Démonstration. Soit $(p^*, \vec{X}^*)$ une allocation de marché.

Supposons que $\vec{X}^*$ ne soit pas Pareto-optimale. Alors, il existe $\vec{X}'$ réalisable telle que :

$$\begin{aligned}&\forall i, u^i(X^{i\prime}) \geqslant u^i(X^{i*})\\ &\exists j, u^j(X^{j\prime}) > u^j(X^{j*})\end{aligned}$$

Pour simplifier la démonstration, on pose $j = 2$, et $\forall i \neq 2$, $u^i(X^{i\prime}) = u^i(X^{i*})$. Alors, selon le même argument que dans la démonstration du premier théorème, $p^* X^{2\prime} > p^* e^2$ (par maximisation de u) et $\forall i \neq 2, p^* X^{i\prime} \geqslant p^* e^i$ (par minimisation des dépenses sous l'hypothèse de non-saturation). Ansi, on a $p^* \sum X^{i\prime} > p^* \sum e^i$ et donc $\vec{X}'$ n'est pas réalisable. Contradiction. ■

1.3.2 Second théorème

Théorème 1.7 (Second théorème de l'économie du bien-être). *Soit une économie :* $\mathcal{E} = \{u^i,\ i \in [\![1, I]\!],\ (X^i)$ *convexe,* u^i *quasi-concave, vérifiant la non-saturation locale, continue*$\}$*. Soit une allocation* $\vec{X}^*$ *faiblement Pareto-optimale. Alors, il existe un couple* (p^*, τ^{i*}) *tel que* $\vec{X}^*$ *soit solution du programme :* $\max\{u^i(X)\}$ *sous la contrainte* $pX \leqslant \tau^{i*}$*.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème repose sur la possibilité de trouver entre deux convexes d'intérieur non vide qui ont au plus un point commun un hyperplan qui les sépare. On va d'abord prouver le lemme suivant :

Lemme 1. Si $\forall i$, u^i est quasi-concave, non-saturée localement, continue, alors il existe p^* qui soit solution du programme : $\min(p^* X)$ sous la contrainte $u^i(X) \geqslant u^i(X^{i*})$.

Soit $C = \left\{f, \exists \vec{X}, u^i(X^i) > u^i(X^{i*}), \sum_i X^i = f\right\}$

Remarque. La dotation globale de la société $e = \sum_i e^i$ n'appartient pas à C. Sinon, X ne serait pas Pareto-optimal.

Si $\forall i$, u^i est quasi-concave, C est convexe. Si les u^i vérifient la non-saturation locale, C n'est pas vide. Sous les trois conditions sur les U^i, C est un ouvert convexe non-vide.

Par ailleurs, la non-saturation locale implique que e est sur la frontière de C.

Le théorème de séparation des convexes implique qu'il existe $p^* \neq 0$ tel que $\forall f \in C$, $p^* f \geqslant p^* e$.

Soit donc $\tau^{i*} = p^* X^{i*}$. Supposons qu'il existe un individu h tel que $u^h(X^h) \geqslant u^h(X^{h*})$. Considérons alors les suites d'allocations telles que

$$\begin{array}{l} u^i(X_n^i) > u^i(X^{i*}) \\ u^h(X_n^h > u^h(X^h) \geqslant u^h(X^{h*}) \end{array}$$

Soit $f_n = \sum_{i \neq h} X_n^i + X_n^h$. D'après ce qui précède, $f_n \in C$. Alors :

$$f_n \in C \Rightarrow p^* f_n \geqslant p^* e \Rightarrow p^* f \geqslant p^* e$$

où $f = \lim_{n \to +\infty} f_n$. On a donc :

$$p^* \sum_{i \neq h} X^{i*} + p^* X^h \geqslant p^* e = p^* \sum_i X^{i*}$$

Finalement : $p^* X^h \geqslant p^* X^{h*} \geqslant \tau^{h*}$, ce qui achève de démontrer le lemme (1).

Le lemme équivaut à :

$$\exists p^*, u^i(X^i) \geqslant u^i(X^{i*}) \Rightarrow p^* X^i \geqslant p^* X^{i*}$$

Mais nous voulons $\max\{u^i(X)\}, pX \geqslant p^* X^{i*} = \tau^{i*}$. Nous avons donc besoin d'une condition telle que la minimisation des dépenses sous contrainte d'utilité implique la maximisation de l'utilité. Or, cette implication est trivialement fausse si le prix d'un bien est 0.

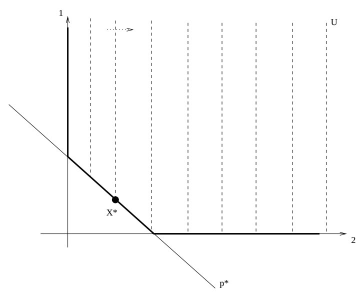

FIG. 1 – Un contre-exemple simple

Exemple (Contre-exemple). Dans la figure 1, l'agent n'aime que le bien 2 (appellons-le le caviar), mais s'il n'a pas assez de ressources, il doit consommer du bien 1 (mettons des rutabagas) pour survivre. X^* est alors solution d'un programme de minimisation du coût, mais pas de maximisation de l'utilité sous contraintes de ressources.

Ces deux exemples nous suggèrent le lemme :

Lemme 2. Si $p^* X^{i*} > \min_{x \in X^i} p^* x$, alors la minimisation du coût implique la maximisation de l'utilité.

À ce point, on peut se demander s'il n'existe pas une preuve plus directe de ce théorème. Il n'en existe pas, et toutes ces conditions sont nécessaires. Historiquement, Arrow et Debreu avaient séparément entrepris de le démontrer. Quand ils s'en sont rendus compte, ils ont fusionné leurs deux articles, chacun corrigeant au passage une erreur commise par l'autre. Voici une illustration de celle commise par Debreu :

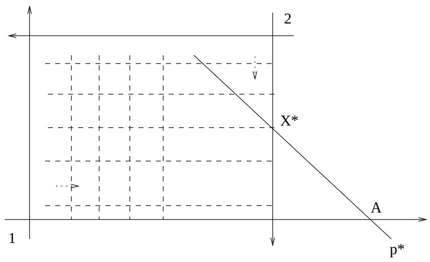

FIG. 2 – L'Erreur de Debreu

Exemple (Contre-exemple). Dans la figure 2, 1 ne connaît pas la taille de la boîte d'Edgeworth, puisque ses seules informations sont ses dotations initiales et le système de prix. Aux pris p^*, il va donc vouloir se rendre en A, ce qui n'est pas une allocation réalisable. Les système de prix représenté par toute droite de pente négative conduit au même résultat : il n'y a pas d'équilibre convenable. Le seul équilibre possible est avec une droite des prix verticale. Mais alors, 2 veut aller à l'infini, puisqu'il peut infiniment augmenter son utilité sans coût, donc tout point de l'axe est solution de la minimisation des coûts. L'équilibre X^* est donc encore un exemple de minimisation de la dépense qui n'est pas une maximisation de l'utilité.

On pourrait penser que ces cas pathologiques n'adviendraient pas si on demandait à X^* d'être Pareto-optimal au sens fort. C'est malheureusement faux, comme le montre la figure 3. Comme la courbe d'iso-utilité de 1 admet une

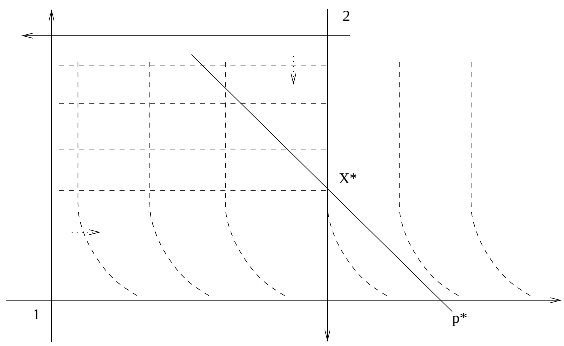

FIG. 3 – Encore plus subtil

tangente infinie en X^*, celui-ci est Pareto-optimal au sens fort sans jamais être résultat de la maximisation de l'utilité de 1, sauf dans le cas où la droite de budget est verticale. Mais alors, c'est 2 qui va vouloir partir à l'infini, comme dans le cas précédent.

On ne peut donc pas se débarasser de la condition du lemme 2. Or, cette condition est gênante : elle met en jeu les prix, et le modèle ne nous dit rien sur le système de prix qui va émerger des interactions de marché. On pourrait essayer alors d'éviter tous les problèmes en se cantonnant aux cas où il existe bien un équilibre intérieur, c'est-à-dire X^{i*} appartient à l'intérieur de X^i pout tout i. Mais cette hypothèse est complêtement irrecevable : il existe beaucoup de biens que nous consommons en quantité nulle, et qui ne nous apportent aucune utilité (exemple : du Viagra pour une femme). C'est d'autant plus vrai si nous considérons des biens localisés dans l'espace et le temps (que nous importe le prix du canard laqué à Canton en 2150 ?).

Ce problème du choix de la bonne hypothèse à faire à nécessité dix ans de recherche. Il a finalement été résolu par la méthode suivante.

Définition 1.6 (Économie de ressources (Ressource-Related Economy)). Une économie de ressources est une économie telle qu'étant donnée une allocation réalisable $\vec{X}^*$, pour toute partition non triviale $\{I_1, I_2\}$ de l'ensemble I des individus, je peux améliorer strictement la situation des membres de I_1 en créant n'importe quelle quantité positive d'un bien que consomme le groupe I_2.

Proposition 1.8. *Dans une économie de ressources, il ne peut pas y avoir de situation où un agent a à la fois des dotations strictement positives et des dépenses nulles.*

Démonstration. Soit une économie de ressources, et e une dotation agrégée. Comme les prix sont positifs, $p^*e > 0$. il existe donc un individu, appelons-le 1, qui a une dépense non nulle. Cet individu effectue donc une maximisation de son utilité puisqu'il effectue une minimisation des coûts en un point intérieur.

Supposons maintenant qu'il existe 2 tel que 2 ait une dépense nulle pour le vecteur de prix p^* et une dotation strictement positive. Alors, 2 consomme d'au moins un bien. Mais comme sa dépense est nulle, ce bien a donc un prix nul. Comme il s'agit d'une économie de ressources, une plus grande consommation de ce bien améliorerait l'utilité de 1. comme le prix est nul, il peut en demander une quantité infinie pour un coût nul, ce qui maximise son utilité. Il ne minimise donc pas son coût en dépensant quoi que ce soit pour d'autres biens. Il ne maximise donc pas son utilité. Contradiction. Il n'existe donc pas, dans une économie de ressources, d'agent ayant une dépense nulle avec des dotations strictement positives. ■

Avec cette hypothèse, la preuve du théorème est donc réalisable. ■

Cette longue démonstration nous montre que le problème, laissé pendant, de l'existence d'équilibres de marché est complexe. En effet, les conditions pour l'existence de tels équilibres sont peu ou prou les mêmes que celles du second théorème. Le plus souvent, les manuels passent sur ces difficultés en proposant la démonstration suivante.

Seconde démonstration du théorème 1.7.

Soit $\vec{X}^*$ une allocation Pareto-optimale.

L'idée est qu'il suffit de voir ce qui se passe quand on donne redistribue les biens de manière à ce que la dotation initiale $\vec{e}$ soit égale à $\vec{X}^*$. Soit alors p^* les prix d'équilibre de marché. Supposons que $\bar{X}$ soit solution du programme $\max(u^i(X))$ sous la contrainte $p^*X \leqslant p^*e^i$. Par définition, toutes les solutions de ce programme donnent le même niveau d'utilité, $u^i(\bar{X}) \geqslant u^i(e^i)$. Soit donc $(p, \bar{X})$ un équilibre de marché pour la dotation e. Comme $u^i(\bar{X}) \geqslant u^i(e^i) = u^i(X^{i*})$, et que X^* est un optimum de Pareto, $\forall i \in I, u^i(\bar{X}^i) = u^i(X^{i*})$. X^*, et donc e, est donc une solution du programme ci-dessus. Ce résultat est parfois qualifié d'argument des préférences révélées. ■

Où est l'astuce ? Elle réside dans l'hypothèse d'existence de prix d'équilibre de marché. On voit donc bien à quel point cette condition est proche de celles d'application du Second théorème.

Voici une idée de la démonstration de l'existence de ces prix.

Démonstration. Soit une économie décrite par (u^i, e^i), et le programme $\max(u^i(X^i))$ sous la contrainte $pX^i \leqslant pe^i$. La solution de ce programme est une fonction $X^i(p)$. On laissera délibérément de côté le problème de savoir si c'est bien une fonction. Il suffit de dire que c'est vrai si la condition définit un ensemble compact, ce qui revient à supposer que les prix sont strictement positifs et que les fonctions d'utilité sont strictement quasi-concaves.

Soit alors $Z^i = X^i(p) - e^i$ la fonction de demande nette, et $Z^a(p)$ la demande nette agrégée. Un équilibre de marché est alors un vecteur de prix p^* tel que $Z^a(p^*) = 0$. Cette relation ne me fournit en fait que $L - 1$ équations, puisque $Z^a(p)$ doit être homogène de degré un. Mais la loi de Walras me donne l'équation manquante. Je ne suis pas pour autant assuré que le système est soluble :Z^a n'a aucune raison particulière d'être linéaire en p.

Il faut donc avoir recours au raisonnement suivant : soit $p \in \Delta^{L-1}$ un vecteur de prix, Δ^{L-1} étant le simplexe de dimension $L - 1$ des vecteurs dont toutes les composantes sont positives et de somme égale à 1, et y^a une allocation appartenant à un compact de dimension L. On construit alors la fonction F : $(p, y) \rightarrow (p', y')$ avec $y' = Z^a(p)$ la demande globale agrégée aux prix p, et $p' = \text{argmax}(py)$. Comme F est une correspondance bien définie d'un compact dans un autre, elle admet un point fixe, et ce point fixe est un équilibre de marché.

On remarque qu'au point fixe, $y^* = 0$. En effet, au point fixe, y^* n'a que des éléments nuls ou négatifs. Pour tout les éléments strictements négatifs, $p^* = 0$. On a alors bien un point tel que $p^*y^* = 0$, ce qui caractérise un équilibre de marché.

Implicitement, nous avons ici utilisé le théorème du point fixe, qui a pour hypothèse la convexité de la fonction de correspondance F, propriété qui revient à supposer la convexité des préférences. ■

2 Extensions des théorèmes

2.1 L'argument d'échanges

On voit souvent les deux théorèmes de l'économie du bien-être utilisés en commerce international pour soutenir le libre échange.

Soit en effet deux économies :

$A : \mathcal{E} = \{u^i, e^i\}_i,$ avec un équilibre de marché (p^A, X^A)
$B : \mathcal{E} = \{u^j, e^j\}_j,$ avec un équilibre de marché (p^B, X^B)

Les équilibres de marché sont ceux existant quand les deux économies fonctionnent séparément. On fusionne ces deux économies en une économie mondiale $W : \mathcal{E} = \{u^k, e^k\}_k$. Supposons qu'on peut y trouver un équilibre de marché (p^W, X^W). On sait que X^W est faiblement Pareto-optimal. Mais cela signifie seulement qu'une personne au moins est plus heureuse dans X^W que dans (X^A, X^B), toutes les autres pouvant s'en trouver plus mal, comme on le voit sur la figure 4.

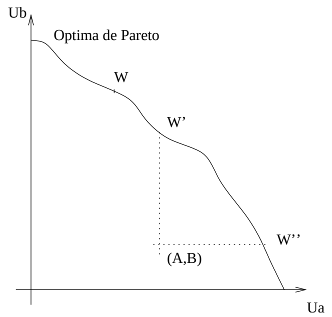

FIG. 4 – Les optima de Pareto dans l'économie mondiale

Mais on sait qu'on peut calculer des optima de Pareto qui sont Pareto supérieurs à (X^A, X^B) en résolvant le programme :

$\max\{\sum_{k=i,j} \alpha_k u^k(X^k)\}$
avec les contraintes :
$\sum X^k \leqslant \sum e^k$allocation réalisable
$\forall i, u^i(X^i) \geqslant u^i(X^{iA})$
$\forall i, u^j(X^j) \geqslant u^j(X^{iB})$

Le lieu géométrique de ces solutions est le segment $[W', W'']$.

D'après le Second théorème, je sais qu'il existe un système de transferts (τ^i, τ^j) et un prix $\tilde{p}$ tel que je puisse aller de (X^A, X^B) à n'importe quel point dans $[W', W'']$.

Habituellement, la démonstration de l'optimalité du libre échange ne va même pas si loin. Comme les équilibres de marché constituent le noyau de l'économie, on peut dire qu'il existe au moins un individu dans chaque économie qui bénéficie de l'échange. Comme les modèles posent des individus « représentatifs », cela suffit. On voit que si l'on tient compte du fait que les économies sont constituées d'individus différents, la solution du problème est un peu plus complexe.

Voyons donc quels tranferts on peut réaliser pour aboutir à des allocations Pareto-supérieures à (X^A, X^B). Il faut noter que ces tranferts doivent se faire *avant* la fusion des deux économies. En particulier, on cherche le transfert tel que :

$$\sum_i \tau^i = \sum_i \tilde{p}\tilde{X}^i - \tilde{p}e^i = \tau^A$$
$$\sum_j \tau^j = \sum_j \tilde{p}\tilde{X}^j - \tilde{p}e^j = \tau^B$$
$$\tau^A = \tau^B = 0$$

Théorème 2.1 (Gramond-McFadden). *Il existe sur le segment $[W', W'']$ une allocation W^* tel que les transferts pour aller de (X^A, X^B) vérifient $\tau^{A*} = \tau^{B*} = 0$.*

On n'a donc pas à faire de transfert entre les pays. Mais il faut alors coordonner les politiques de redistribution des deux pays avant la fusion, ce qui pose le problème de comportements stratégiques des deux pays.

2.2 Le Paradoxe du transfert

2.2.1 Présentation

Ce paradoxe a connu son heure de gloire dans le sillage des théories de la croissance appauvrissante.

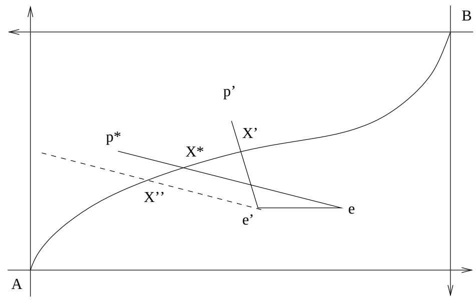

FIG. 5 – Le Paradoxe du tranfert

Soit donc un transfert de ressources entre A et B, conduisant de la dotation e à la dotation $\hat{e}$. À l'équilibre de marché correspondant, celui qui a bénéficié de l'aide est plus mal loti qu'à l'équilibre de marché correspondant à la dotation initiale. Cet argument est en fait très ancien, puisqu'il remonte à J. S. Mill, qui remarquait que dans certains cas, l'apétit du récipiendaire pour certains biens pouvait être suffisant pour faire plus que compenser l'augmentation de son revenu. En termes contemporains, nous dirions que l'effet de substitition peut être de sens inverse à celui de revenu, au point de faire plus que le compense. Keynes a rétorqué que l'effet de substitution pouvait aussi jouer dans le même sens que l'effet de revenu. Sur la figure 5, le déplacement de X^* à X'' est l'effet de revenu, celui de X'' à X' l'effet de substitution.

2.2.2 Formalisation

Nous nous plaçons dans un cas pratique (« well-behaved ») : u^i est continue, ne touche pas les limites, $\mathrm{d}u > 0$, D^2u définie négative sur $[\mathrm{d}u]^\perp$. On cherche à résoudre le programme :

$$\begin{array}{l} \max\{u^i(z + e^i)\} \\ pz = \tau \\ \tau = 0 \end{array}$$

Les conditions au premier ordre s'écrivent :

$$\begin{array}{l} \mathrm{D}^2\mathrm{d}z^i - p\mathrm{d}\lambda^i = \lambda^i\mathrm{d}p \\ -p'\mathrm{d}z^i = z^{i'}\mathrm{d}p = z^{i'}\mathrm{d}p - \mathrm{d}\tau^i \end{array}$$

Matriciellement :

$$\begin{pmatrix} D^2u & -p \\ -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dz^i \\ d\lambda^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^i dp \\ z^{i'} dp - d\tau^i \end{pmatrix}$$

On pose :

$$\begin{pmatrix} S^i & -v^i \\ -v^i & \alpha^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^2u & -p \\ -p & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

On ne se posera pas trop de questions à propos de l'existence de cet inverse. Le fait que la hessienne soit définie négative suffit en général. Cet inverse nous permet d'écrire les relations de Slutsky :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} D_p z^i & = & \lambda^i S^i - v^i z^{i'} \\ D_{\tau^i} z^i & = & v^i \end{array} \right.$$

Soit $h^i(z^i(p,\tau) + e^i)$ l'utilité indirecte.

$$\begin{array}{rcl} dh^i & = & D_z h^i (D_p z^i dp + D_\tau z^i d\tau^i) \\ & = & \lambda^i p[(\lambda^i S^i - v^i z^i)dp + v^i d\tau^i] \\ & = & -\lambda^i z^i dp + \lambda^i d\tau^i \end{array}$$

La dernière relation est l'équation de Roy. Le paradoxe précédent revient à dire que $z^i dp$ peut être assez grand pour faire plus que compenser $d\tau^i$

2.3 Politique économique

2.3.1 Transferts optimaux

Dans le cadre retenu, il est clair que les transferts directs sont l'instrument optimal de politique économique. Mais ce qui précède nous montre qu'il convient de considérer les conséquences d'un transfert sur les prix d'équilibre. Il convient donc de déterminer la fonction $p(\tau)$. τ est en effet la variable d'ajustement et p la variable endogène même si, individuellement, les agents sont price-takers.

$$\begin{array}{l} \sum_i z^i(p,\tau^i) = 0 \Rightarrow \sum_i D_p z_i dp + \sum_i D_{\tau^i} z_i d\tau^i = 0 \\ \Rightarrow \sum_i (S^i - v^i z^{i'}) dp + \sum_i v^i d\tau^i = 0 \end{array}$$

On remarque que si $\forall i$, $v^i = v$, c'est-à-dire si la propension marginale à consommer chaque bien est identique pour tous les individus, les prix ne changent pas. Pour tenir compte des effets de substitution, il me faut connaître les fonctions d'utilité, ou du moins les fonctions de demande individuelles. Or, je ne connais que les proprensions marginales à consommer v^i.

2.3.2 Désagrégation

Le planificateur social n'a à sa disposition que des statistiques plus ou moins agrégées concernant uniquement les transferts, les dotations, les prix et les demandes d'équilibre. On exclut ici les comportements stratégiques des individus qui voudraient tirer parti de cette asymétrie d'information pour influer sur les transferts.

Soit donc un planificateur social qui connaît les vecteur $X^a(p,\tau)$. Il peut résoudre $X^a(p,\tau) = \sum e^i$ pour obtenir les fonctions de prix $p(e^i)$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_k^a}{\partial \tau^i} &= \frac{\partial X_l^i}{\partial \tau^i} = v_p^i \\
\frac{\partial X_k^a}{\partial p_l} &= \sum_i \frac{\partial X_k^i}{\partial p_l} \\
\frac{\partial X_k^a}{\partial p_l} &= \sum_i \left(\frac{\partial X_k^i}{\partial p_l}\right)_{\overline{u}} - v_k^i X_l^i
\end{aligned}$$

Réciproquement,

$$\frac{\partial X_l^a}{\partial p_k} = \sum_i \left(\frac{\partial X_l^i}{\partial p_k}\right)_{\overline{u}} - v_l^i X_k^i$$

Comme les effets de substitution sont symétriques entre les biens,

$$\frac{\partial X_k^a}{\partial p_l} = \sum_i \left(\frac{\partial X_k^i}{\partial p_l}\right)_{\overline{u}} - v_k^i X_l^i = \frac{\partial X_l^a}{\partial p_k} = \sum_i \left(\frac{\partial X_l^i}{\partial p_k}\right)_{\overline{u}} - v_l^i X_k^i$$

Il vient alors :

$$\frac{\partial X_k^a}{\partial p_l} - \frac{\partial X_l^a}{\partial p_k} = v_l^i X_k^i - v_k^i X_l^i$$

Moyennant la résolution d'un système linéaire, je peux maintenant calculer les X^i, et donc les u^i.

2.4 Le problème de l'agrégation

2.4.1 Le Problème

Nous avons été peu pointilleux sur les conditions de la détermination de $p(\vec{e})$.

Remarque (Normalisation). Soit $z^a(p,e)$ la fonction de demande agrégée. Nous savons que si p^* est un équilibre de marché, $\forall k$, kp^* en est un. Considérons donc que l'économie a $L+1$ biens, les $L+1$-ième étant utilisé comme numéraire, et normalisons les prix. Dans la suite, l'équation $z^a = 0$ pourra avoir L ou $L+1$ termes (ce qui est équivalent en vertu de la loi de Walras).

Nous voulons donc montrer que, localement au moins, $p(e)$ est une fonction. La différentielle totale de la fonction de demande nette agrégée s'écrit :

$$\mathrm{D}_p z \mathrm{d}p + \mathrm{D}_e z \mathrm{d}e = 0$$

On a alors :

$$\mathrm{d}p = (\mathrm{D}_p z)^{-1} (\mathrm{D}_e z \mathrm{d}e)$$

Notre problème est donc de savoir si $(\mathrm{D}_p z)$ est inversible. On va considérer la fonction de demande agrégée paramétrée par les dotations initiales z_e. Si z_e est telle que :

$$z_e = 0 \Rightarrow \mathrm{D}_p z_e \text{ est de plein rang}$$

alors je peux résoudre l'équation.

Sous quelles conditions sur les fonctions d'utilité ai-je cette propriété ? Ces conditions sont malheureusement *très* contraignantes, se ramenant en pratique à avoir des individus qui sont tous indentiques.

Remarque. Quand nous avons prouvé l'existence d'un équilibre de marché, nous avons utilisé le fait que l'homogénéité d'ordre 0 nous permettait de restreindre l'ensemble des prix au simplexe Δ qui intersecte tous les rayons des kp possibles. Mais alors, pourquoi ne pas avoir choisi une boîte plutôt qu'un simplexe ? Cela aurait été possible, mais il aurait fallu la choisir avec attention, car $z(kp) = z(p)$ et $z(0) = 0$ implique une discontinuité en zéro. la normalisation (qui revient à se placer sur le simplexe) garantit donc que nous évitons cette discontinuité, ce qui nous permet d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires en toute sécurité.

Remarque. Une question récurrente dans la littérature concernant ce problème, dit problème de l'agrégation, se demande sous quelles conditions l'économie dans son ensemble se comporte comme une seule personne. On cherche donc à vérifier les conditions :

$$\begin{array}{l} X^a(p,e) = X^a(p, \sum e^i) \\ (u^a, e^a) \text{ la demande agrégée soit } X^a(p, \sum e^i) \end{array}$$

Le plus souvent, on présente la solution qui consiste à demander que les fonctions d'utilité soient homothétiques de centre 0. En effet, les relations de Slutsky, $\mathrm{D}_p X^i = S^i - v^i X^i$, montrent que non seulement il faut que S^i soit symétrique définie négative, mais aussi que $v^i X^i$ soit symétrique définie positive. Cela signifie que chaque agent dépense son euro marginal de la même manière qu'il a dépensé les précédents, ce qui est exactement demander aux fonctions d'utilité d'être homothétiques.

La conclusion que le problème n'était soluble que si l'on supposait tous les agents identiques n'était évidemment pas satisfaisante. C'est pourquoi Debreu s'est attelé à trouver des conditions moins exigeantes.

2.4.2 La Démonstration de Debreu et ses suites

Pour sa démonstration, Debreu fait la remarque : je veux prouver que $z_e = 0 \Rightarrow \mathrm{D}_p z_e$ de plein rang, mais en fait, je n'ai besoin, pour l'inversibilité, que du plein rang ligne. Il me suffit donc que l'application soit localement surjective.

Pour notre problème, on va donc considérer $z(p,e)$ comme une fonction de $\mathbb{R}^{L+I(L+1)}$ dans $\mathbb{R}^L$. Le jacobien de cette fonction a les même lignes que $\mathrm{D}_p z_e$, mais un bien plus grand nombre de colonnes. Je n'ai donc pas besoin qu'elle soit de plein rang, mais seulement qu'il existe L lignes indépendante parmi les $L + I(L+1)$. D'où le théorème :

Théorème 2.2 (Théorème de transversalité).

$$\begin{array}{l} z(p,e) = 0 \Rightarrow D_{p,e}(z) \textit{ est de plein rang ligne} \\ \Rightarrow z_e(p) = 0 \Rightarrow D_p z_e \textit{ est de plein rang ligne} \\ \quad \textit{pour presque toutes les valeurs du paramètre } e \end{array}$$

Debreu trouve donc ainsi une condition moins exigente. Le graphe 6 est canoniquement associé à ce problème : on peut exprimer p en fonction de e localement, sur les partie A, B et C de la courbe.

Remarque (Pour presque toutes les valeurs...). En pratique, cette expression signifie que l'ensemble des points tels que la propriété n'est pas vérifiée est un ensemble fermé de mesure nulle.

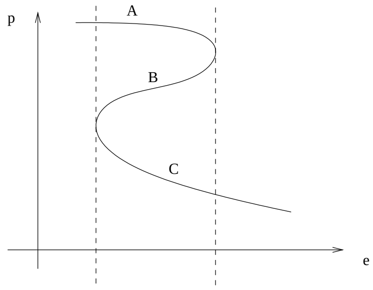

FIG. 6 – Transversalité locale

Exemple. Soit $z = p^2+e^2-1$. On a : $\mathrm{D}_{p,e}z = (2p, 2e)$. On a bien la propriété $z = 0 \Rightarrow \mathrm{D}_{p,e}z$ est de rang 1, puisque si $z = 0$, p et e ne peuvent être simultanément nuls. Pour presque toutes les valeurs du paramètres e (plus précisément $|e| \neq 1$), on a bien $z_e(p) = 0 \Rightarrow \mathrm{D}_p z_e(p) \neq 0$.

2.4.3 Une Démonstration plus intuitive

La démonstration de Debreu était la première et la plus technique. À sa suite, certains ont cherché des preuves plus simples. Celle-ci est surtout intéressante par sa méthode.

Je veux toujours prouver que si $z(p, e) = 0$, $\mathrm{D}_{p,e}(z)$ est de plein rang ligne. Cela revient à dire que :

$$\forall \mathrm{d}b \in \mathbb{R}^L, \exists (\mathrm{d}p, \mathrm{d}e), (\mathrm{D}_{p,e}z)(\mathrm{d}p\ \mathrm{d}e)' = \mathrm{d}b$$

Comme il s'agit d'une opération linéaire, il me suffit de démontrer cette propriété pour les seuls vecteurs $(b_i)_{i\in[\![1,L]\!]}$ de la base canonique de $\mathbb{R}^L$. Je cherche donc à modifier p et e de telle manière que la demande d'un unique bien l augmente tandis que celle des autres reste la même : $\mathrm{d}z_l = 1$, $\forall k \neq l, \mathrm{d}z_k = 0$.

Supposons donc que les quantités soit suffisamment fortes pour que les variations de prix soient négligeables. Alors, j'effectue l'opération suivante :

$$\forall i \in [\![1, I-1]\!], \mathrm{d}e^i = 0$$

Les demandes de ces individus ne sont donc pas modifiées, puisqu'ils font face aux mêmes prix avec les mêmes dotations. Pour l'agent I :

$$\mathrm{d}e^i = \begin{cases} \mathrm{d}e^I_l = 1 \\ \mathrm{d}z^I_k = 0, \forall k \neq l \\ \mathrm{d}z^I_{L+1} = p_l \end{cases}$$

La dernière ligne constitue la partie astucieuse : nous ne nous occupons pas du changement dans la demande du numéraire. On sait en effet que les autres marchés seront en équilibre, donc celui-là aussi.

Je peus donc prouver le résultat. La connaissance au moins locale de $p(e)$ me permet alors de raisonner en statique comparative.

2.4.4 Généralisation

La démonstration précedente fonctionne bien sur le problème de la demande nette. Nous allons ici esquisser une démonstration qui fonctionne dans un cadre plus général.

Comme l'économie est décrite par des fonctions convexes, les solutions des problèmes d'optimisation sont caractérisées par des conditions au premier ordre. Les variables sont : (e, X, λ, p), soit $3I + L$ variables (en incluant les multiplicateurs de Lagrange). Posons $\xi = (X, \lambda, p)$.

Soit $F(\xi, e)$:

$$F(\xi, e) = \begin{cases} \mathrm{D}u^i(X^i) - \lambda^i p \\ pX^i - pe^i \\ \sum X^i - \sum e^i \end{cases}$$

ξ est de dimension :

$$dim(\xi) = (\underbrace{I(L+1)}_{X} + \underbrace{I}_{\lambda} + \underbrace{L}_{p}$$

Un équilibre est donc défini par $F(\xi, e) = 0$, ce qui donne I fois $L + 1$ condition au premier ordre, I contraintes budgétaires et L équations pour l'apurement des marchés.

Définition 2.1 (Transversalité en 0). On dit que $F(x, y)$ est transverse en zéro, noté $F \not\pitchfork 0$ si

$$F = 0 \Rightarrow \mathrm{D}_{x,y}F \text{ de plein rang ligne}$$

On veut donc prouver :

Proposition 2.3.

$$F(\xi, e) \not\pitchfork 0 \Rightarrow F_e(\xi) \not\pitchfork 0 \textit{ pour presque tout } e$$

Si cette proposition est vraie, je peux localement exprimer $\xi(e)$.

Pour la démontrer, il suffit de prendre les dérivées (conditions du premier ordre) et de faire des opérations sur les lignes et les colonnes pour obtenir une matrice bloc-diagonale, donc de plein rang ligne. On se rend alors compte que les opérations qu'on vient de faire sont équivalentes à la méthode de la démonstration précedente. Cette méthode a l'avantage de fonctionner pour tout problème caractérisé par des conditions au premier ordre.

2.5 Universalité des échanges

Le théorème central de la section 2.4 peut être réutilisé d'une manière différente. On a prouvé que l'on peut localmement exprimer $p(e)$ pour presque toutes les valeurs de e.

Soit une famille d'économies $\mathcal{E} = (e^i, u^i)$, u^i fixées, indexées par e. On va s'attacher à prouver le théorème suivant :

Théorème 2.4 (Universalité des échanges). *Pour presque toutes les valeurs de e, tous les individus échangent de tous les biens, ce qui s'écrit :*

$$z_e^a(p) = 0 \Rightarrow \forall (i, l), z_{e,l}^i(p) \neq 0$$

Quel que soit le bien considéré, personne ne consomme donc intégralement et uniquement sa dotation initiale.

Démonstration. Soit $j \neq I$, $k \neq L+1$.

Lemme 3. De manière générale, $z_e(p) = 0 \Rightarrow z^j_{e^j,k}(p) \neq 0$.

Proposition 2.5. *Si je peux démontrer le lemme 3, alors je peux démontrer le théorème.*

Démonstration de la proposition 2.5. Soit $\mathcal{E}^{j,k}$ l'ensemble des économies telles que l'individu j ne soit pas autarcique pour le bien k. Il s'agit d'un ensemble ouvert et dense.

Considérons maintenant $\bigcap j, k\mathcal{E}^{j,k}$. C'est une économie ayant la propriété voulue : aucun individu n'est autarcique en quelque bien que ce soit. Comme c'est une intersection *finie* d'ouverts dense, c'est aussi un ouvert dense. Cela signifie que si le lemme est vérifié, je peux sans problème ignorer les économie telles qu'un individu est autarcique, car c'est une réunion finie de fermés d'intérieur vide, donc un fermé d'intérieur vide. ■

Démonstration du lemme 3. Soit $F^j_k(p,e) = (z_j(p,e), z^j_k(p,e))'$ le vecteur à $L+1$ lignes. Il me suffit de prouver que $F \not\pitchfork 0$. Pour cela, il me suffit de montrer comme précedemment que je peux perturber e et p de telle manière que la demande d'un bien augmente de 1, le reste ne changeant pas. Pour les L premières lignes, il me suffit de faire comme précedemment.

Pour la ligne $L+1$, j'effectue les perturbations suivantes :

$$\begin{array}{lr} \mathrm{d}p = 0 & \forall i \neq j, \mathrm{d}e^i = 0 \\ \mathrm{d}e^j_j = -1 & \mathrm{d}e^I_k = 1 \\ \mathrm{d}e^j_{L+1} = p_k & \mathrm{d}e^I_{L+1} = -p_k \end{array}$$

Comme les dotations sont inchangées, les demandes ne changent pas. Les demandes nettes pour les L premiers bies ne changent pas non plus. Seule celle pour le bien $L+1$ change, mais cela ne nous concerne pas. On va maintenant utiliser la contraposée du théorème 2.2 : ici, la matrice $\mathrm{D}_p F^j_{e,k}$ a $L+1$ lignes (les F^j_k) et L colonnes (les prix). Elle ne peut donc jamais être de plein rang ligne. En conséquence, pour presque toutes les valeurs de e, $F^j_k \neq 0$. ■

Ainsi, pour presque toutes les valeurs de e, l'individu j aura une demande nette non nulle pour le bien k. ■

Exemple. On veut prouver que génériquement (c'est-à-dire sur un ensemble ouvert et dense), une matrice 2×2 est inversible.

Soit donc :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{et } \Pi = (\pi_1, \pi_2) \in \mathbb{S} = \{\Pi / \|\Pi\| = 1\}$$

On notera que $\mathbb{S}$ est de dimension 1.

Soit aussi :

$$\begin{array}{lrcl} F : & \mathcal{R}^4 \times \mathbb{S} & \to & \mathcal{R}^2 \\ & F(\Pi, a, b, c, d) & = & \begin{pmatrix} a\pi_1 + b\pi_2 \\ c\pi_1 + d\pi_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut montrer que $F(\Pi, a, b, c, d) \not\pitchfork 0$. $\mathrm{D}_{\Pi,a,b,c,d}F$ est une matrice de 2 lignes et 5 colonnes. Comme π_1 et π_2 ne peuvent être simultanément nulles, cette matrice a au moins deux colonnes linéairement liées. Ainsi, on a $F_{a,b,c,d} \not\frown 0$ pour presque toutes les valeurs des paramètres, et $F_{a,b,c,d} \neq 0$. Si A n'était pas inversible, elle admetrait 0 comme valeur propre, et donc il existerait un point de $\mathbb{S}$ qui annule F. Comme ce n'est pas le cas, A est bien inversible pour presque toutes les valeurs de (a, b, c, d).

Deuxième partie
Échecs de marché

3 Économies avec des externalités

On considère une économie $\mathcal{E}$ avec $L+1$ biens et I individus. Une allocation $\vec{X}$ est donc un vecteur de $\mathbb{R}^{I(L+1)}$.

On va supposer que les utilités des individus dépendent non seulement de la consommation de cet individu, mais aussi de l'allocation globale dans l'économie : $u^i(\vec{X}) = u^i(X^i, X^{-i})$. Cela ne modifie la situation que si X^{-i} affecte la forme des fonctions d'utilité, ce qui revient à dire que les fonctions d'utilité ne sont pas additivement séparables (u^i ne peut se décomposer $u^i(X) = v^i(X^i) + w^i(X^{-i})$).

Définition 3.1 (Équilibre avec externalité, ou équilibre de Nash-Walras). Un équilibre de Nash-Walras est un couple $(p^*, \vec{X}^*)$ tel que :
- $\vec{X}^*$ est réalisable ;
- X^{i*} résoud le programme $\max\{u^i(X^i, X^{-i})$ sous la contrainte $p^*X^i \leqslant p^*e^i$

Chaque individu effectue donc son programme de maximisation en prenant les prix et les consommations des autres agents comme donnés.

Exemple (Contre-exemple). Soit la fonction d'utilité : $u^i(X) = v^i(X^i) + \sum_{h\neq i}\sum_l \lambda^i_{h,l} X^h_l$. Mon comportement de maximisation n'est pas affecté par le comportement des autres. En revanche, le Premier théorème de l'économie du bien-être ne s'applique pas.

Exercice : démontrer qu'en règle générale, les équilibres de Nash-Walras ne sont pas Pareto-optimaux.

Cette approche de l'équilibre général avec externalités a été réinventée à de multiples reprises (Lindahl, Coase, Arrow, Pigou,...). L'approche de Coase est simplement d'étendre l'espace des biens, pour tendre vers un système complet de marchés. Celle de Pigou et Lindahl ont pour principal mérite de clarifier les choses sur ce que sont les optima de Pareto. En effet, taxes pigouviennes et conditions de Bowen-Lindahl-Samuelson reviennent à vouloir faire payer des prix différents à des individus qui n'ont aucune incitation à révéler leurs préférences. Ce sont donc des solutions de premiers rang, mais aucune n'est réalisable en pratique, malgré l'abondante littérature sur les contraintes d'incitation.

On va donc s'intéresser aux mesures Pareto-améliorantes réalisables.

3.1 Taxe à la vente

Supposons que j'impose une taxe à la vente (qui peut se comprendre comme une TVA) : le vendeur d'une unité de bien l touche p_l, l'acheteur paye $p_l + t_l$.

Proposition 3.1. *Au voisinage de l'équilibre de Nash-Walras, il existe un équilibre $p(t^*)$ Pareto-supérieur à l'équilibre de Nash-Walras.*

Cette proposition démontre la vacuité de la pétition de principe de l'École de Chicago, qui veut que le marché fasse toujours au mieux. La critique de l'intervention étatique doit donc passer par la critique de la possibilité de connaître les paramètres de l'équilibre Pareto-améliorant.

Pour ce qui suit cependant, on va employer des fonctions d'utilité du type :

$$v^i(\vec{X}) = u^i(X^i) + \sum_{h \neq i} \sum_l \lambda^i_{h,l} X^h_k$$

On va voir que la séparabilité nous simplifie la vie, alors que l'essentiel de ce qui va être dit pas la suite peut être généralisé aux cas non-linéaires et non-additifs.

On modélise la taxe $t = (t_1, \dots, t_L, 0)$, le numéraire n'est pas taxé :

$$p^i_l = \begin{cases} p_l & \text{si} \quad X^i_l < e^i_l \\ p_l + t_l & \text{si} \quad X^i_l > e^i_l \end{cases}$$

Le problème est alors :

$$\begin{aligned} &\max\{u^i(X^i)\} \\ &\text{s.c. } p(X^i - e^i)_- \geqslant (p+t)(X^i - e^i)_+ \end{aligned}$$

Notation 3.2. a_+ signifie que je ne garde que les composantes positives du vecteur et fixe les autres à 0.

a_- signifie que je ne garde que les composantes négatives du vecteur, égalise les autre à 0 et change le signe des composantes restantes.

Graphiquement, la taxe modifie la contrainte budgétaire selon le profil de la figure 7.

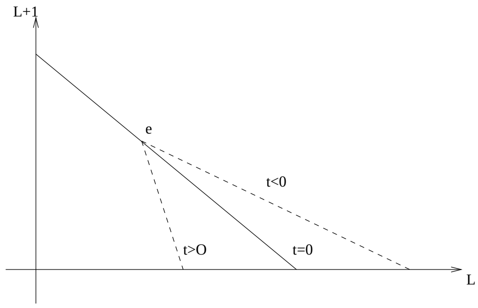

FIG. 7 – Contrainte budgétaire et taxes

Si $t_1 > 0$, la contrainte budgétaire reste convexe, il suffit de faire attention au point de non-dérivabilité. En revanche, si $t_1 < 0$, ce qui correspond à une subvention, le contrainte n'est plus convexe, ce qui rend le problème très complexe. En pratique cependant, on va considérer de faibles variations au voisinage de 0, sur un domaine suffisemment petit pour que les agents puissent négliger la non-convexité.

Selon le même argument que précedemment onj peut localement exprimer p comme une fonction de e et de t.

Tout le problème va donc être de savoir si on peut trouver une matrice A de plien rang ligne telle que $\mathrm{d}uA = \mathrm{d}t$, puisqu'alors, je peux trouver un optimum pour $\mathrm{d}u > 0$.

Afin de prouver ce résultat, nous allons considérer au voisinage de $t = 0$:

$$\mathrm{D}_t(\vec{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^i_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial X^i_1}{\partial t_L} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial X^i_{L+1}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial X^i_{L+1}}{\partial t_L} \end{pmatrix}_i$$

qui représente la dérivée de la fonction d'allocation d'équilibre par rapport aux jeux de taxes.

Proposition 3.3. *$D_t(\vec{X})$ est de plein rang colonne. Cela signifie que quand tout est bien différentiable, les taxes sont aussi importantes que les dotations.*

Lemme 4. $(\mathrm{D}_t(\vec{X}) = 0 \Rightarrow \mathrm{d}t = 0) \Leftrightarrow \mathrm{D}_t(\vec{X})$ est de plein rang colonne.

Si le lemme est vrai, alors $\mathrm{D}_t(X^i)\mathrm{d}t = \mathrm{d}X^i = 0$.

Écrivons alors les conditions de premier ordre pour l'agent I :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\partial u^i}{\partial X_l^i} & = & \mu_i p_l & X_l^i < e_l^i \\ \frac{\partial u^i}{\partial X_l^i} & = & \mu^i(p_l + t_l) & X_l^i > e_l^i \\ \frac{\partial u^i}{\partial X_{L+1}^i} & = & \mu^i & \end{array}\right.$$

Si $\mathrm{D}_t X^i \mathrm{d}t = 0$, alors $\mathrm{D}_t X^i \mu^i = 0$. Les demandes ne se modifiant pas, les prix et les taxes ne se modifient pas non plus. Il est donc clair que le seul vecteur tel que $\mathrm{D}_t X^i \mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \mathrm{d}t = 0$: toute taxe modifie les demandes.

Le programme de maximisation nous fournit les fonctions de demande nette :

$$\left.\begin{array}{l} \max\{u^i(z^i + e^i)\} \\ pz^i \leqslant \tau^i \end{array}\right\} \Rightarrow z^i(z, \tau^i)$$

D'où la différentielle :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}u^i & = & \mu^i[-z^i \mathrm{d}\mathrm{d}\tau^i] \\ & = & \mu^i[-z_+^i(\mathrm{d}p + \mathrm{d}t) + z_-^i \mathrm{d}p + \mathrm{d}\tau^i] \\ & = & \mu^i[-z_+^i(\mathrm{D}_t p + Id)\mathrm{d}t + z_-^i \mathrm{D}_p t \mathrm{d}t + \mathrm{d}\tau^i] \end{array}$$

L'introduction du transfert τ^i est justifiée par le fait que l'argent des taxes doit bien aller quelque part, même si les agents ne le pensent pas toujours ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \tau^i & = & \frac{1}{I}\sum_i t z_+^i \\ \Rightarrow \mathrm{d}\tau^i & = & \frac{1}{I}\sum_i z_+^i \mathrm{d}t \end{array}$$

Comme $\sum z_+^i = \sum z_-^i$, on a $\sum \frac{1}{\mu^i}\mathrm{d}u^i = 0$. La matrice $(\mathrm{d}u^i) = A\mathrm{d}t$ n'est pas de plein rang, puisque $(1 \ldots 1)A = 0$.

Dans une économie avec externalités, soit la fonction d'utilité :

$$v^i(X) = u^i(X^i) + \sum_{h \neq i} \lambda_h^i X^h$$

On a donc :

$$\mathrm{d}v^i(X) = \mathrm{d}u^i(X^i) + \sum_{h \neq i} \lambda_h^i \mathrm{d}X^h$$

Nous avons dans ce qui précède considéré ce qu'il advien de u^i. On a donc :

$$\left(\frac{1}{\mu^i}\mathrm{d}u^i\right)_i = \left(\left[a^i + \sum_{h \neq i} \frac{\lambda_h^i}{\mu^i}\mathrm{D}_p X^h\right] \mathrm{d}t\right)_i$$

Nous savons que $A = (a_i)_i$ peut ne pas être de plein rang. Mais la présence d'externalités modifie la situation, en vertu de la proposition suivante :

Proposition 3.4. *Si $D = A+\Lambda B$ avec B de plein rang ligne, alors pour presque toutes les valeurs de Λ, D est de plein rang ligne.*

Il suffit donc de considérer la matrice des $\mathrm{D}_p X^h$, qui va en général être de plein rang ligne. Cependant, dans ce cas, ne la condition « pour presque toutes les valeurs de Λ »n'est pas entièrement satisfaisante, car Λ ne prend pas n'importe quelles valeurs : la plupart du temps, les λ^h sont nuls. On aurait donc besoin de prouver un peu plus que B de plein rang ligne.

Note : la partie suivante n'est pas au programme de l'examen.

4 Incertitude et externalités

4.1 Cadre

On se place en période 0. Les échanges auront lieu quand un des S états de la nature possible aura été réalisé. On suppose que les agents sont plus ou moins averses au risque, et donc aimerait s'assurer contre cette incertitude.

On a comme précédemment $L+1$ biens, mais ces biens sont doublement indexés : $x_{l,s}$ représente une quantité de bien l disponible dans l'état de la nature s.

4.2 Marchés conditionnels et contrats

La solution la plus connue, d'ailleurs triviale, à ce problème, est de supposer un système complet de marchés conditionnels. De manière plus subtile, Arrow a démontré un résultat similaire sans avoir besoin de marchés conditionnels. Il suppose qu'à la période 0, les agents échangent des contrats conditionnels, tous libellés en unités de compte. Il affirme que ce résultat est robuste à l'utilisation de fonctions d'utilité non-VNM.

Le système complet de marché (solution proposée par Debreu) correspond au programme :

$$\begin{cases} \max & \{u^i(X_n)\} \\ & \sum_{s,l} \tilde{p}_{s,l}(X_{s,l} - e^i_{s,l}) \leqslant 0 \end{cases}$$

Les $\tilde{p}$ sont alors les prix des biens sur les marchés conditionnels.

Arrow propose le programme suivant :

$$\begin{cases} \max & \{u^i(X_n)\} \\ & \sum p_s(X_s - e^i_s) = y_s \\ & \sum q_s y_s = 0 \end{cases}$$

où les y_s sont les revenus de l'individu en unités de compte pour l'état de la nature s. On remarque que les deux contraintes équivalent à : $\sum_s (q_s p_s (X_s - e^i_s) = 0$.

Cette formalisation du problème a l'avantage que les p_s sont de vrais prix, et non des prix conditionnels. De plus, à l'équilibre, la contrainte budgétaire pour s'écrire comme si les q_s étaient les probabilités que le marché assigne à l'état de la nature s. On voit que pour les déterminer, je n'ai pas besoin de connaître les conectures des agents sur ces probabilités. Cette propriété est très forte quand on connaît l'obection de Lucas : même si tous les individus assignent la même probabilité π^i aux différents états de la nature, on a en général $q \neq \pi^i$.

4.3 Incertitude et actifs financiers

Suppposons maintenant que je n'ai pas les y_s, mais eulement des actifs $a \in [\![1, A]\!]$, un actif étant caractérisé par son rendement $r_a = (r_{a,s})_s$ libellé en unités de bien $L+1$, et par son prix q_a. On pourrait les libeller d'une autre manière, mais toues les façons de procéder ont leurs problèmes propres.

La contrainte budgétaire s'écrit maintenant avec $\forall s, p_{L+1,s} = 1$:

$$\begin{array}{rcl} \sum q_a y_a & = & 0 \\ p_s(X_s - e_s) & = & \sum_a r_{a,s} y_a \end{array}$$

Le problème est de savoir comment est déterminé le domaine de q. Deux réponses sont possibles :

A_1 Les π_s définissent une mesure sur $\mathbb{S}$ l'ensemble des états de la nature, et $q_a = \sum \pi_s r_{a,s}$;

A_2 Le domaine est déterminé par les conditions de non-arbitrage : $\left(\sum_a r_{a,s} y_a\right)_s > 0 \Rightarrow \sum q_a y_a > 0$.

Théorème 4.1. *Dans le cadre retenu, $A_1 \Leftrightarrow A_2$.*

Démonstration.

- Sens direct : supposons que $q = \pi R \gg 0$, où $R = (r_{a,s})$. Alors, si $Ry > 0 \Rightarrow \pi Ry > 0$, $q = \pi R \Rightarrow qy > 0$.
- Récirpoque : soit $C = \{q = \pi R, \pi \geqslant 0\}$, et soit $\bar{q} \notin C$. Alors, il existe $\gamma \neq 0$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} q \in C \Rightarrow q\gamma > O \\ \bar{q}\gamma \leqslant 0 \end{array} \right.$$

  La première ligne signifie que $\forall \pi \geqslant 0$, $\pi\gamma \geqslant 0$, donc $R\gamma \geqslant 0 \Rightarrow R\gamma > 0$, ce qui est contradictoire avec $\bar{q}\gamma \leqslant 0$.

D'où le résultat. ■

Appliquons ce théorème en cosidérant le programme :

$$\begin{array}{ll} \max & \{u^i(X)\} \\ & qy \leqslant 0 \\ & p_s(X_s - e_s) \leqslant R_s y \end{array}$$

Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}u & = & \lambda^i_s p_s \\ \lambda^i q & = & \lambda^i G \\ \text{avec} & & \lambda^l = (\ldots, \lambda^i_s \ldots) \geqslant 0 \end{array}$$

Les multiplicateurs de Lagrange λ^i s'interprêtent alors comme des probabilités, exprimant les anticipations sur les prix des actifs. De plus, si je donne à un agent la condition $\sum_s \tilde{p}_s(X_s - e^i_s) = O$, ses conditions du premier ordre sont $\mathrm{D}_s u^i = \mu^i \tilde{p}_s$, ce qui revient à dire que dans ce cas, les solutions au programme de Debreu et celles de programme d'Arrow sont les mêmes.

Cependant, s'il y a plus d'un agent (représentatif), les λ^i n'ont aucune raison d'être les mêmes pour tous les agents. Comme on a les deux conditions : $q = \pi R$ (non arbitrage) et $q = \lambda^i R$ (matrice des anticipations), on a $\lambda^i = qR^{-1}$ si R est inversible. Mais si R est inversible, les λ^i sont les mêmes. Donc, si les λ^i sont différents, les solutions d'Arrow et de Debreu sont différentes.

4.4 Pareto-améliorabilité

Supposons une fonction d'utilité additivement séparable entre les états de la nature : $u^i(X) = \sum_s u^i_s(X^i_s)$. Je dis aux acteurs que leur contrainte est $qy = 0$ et $(p_s - X_s)R_s y$, ce qui me donne un équilibre avec (p^*, q^*, X^*, y^*).

Maintenant, j'interviens en ajustant les portefeuille de telle manière que $y^i = y^{i*} + \mathrm{d}y$, et je fermes totalement le marché des actifs. Je récupère dons $s, \mathrm{d}p, \mathrm{d}X^i_s$. Si je peux Pareto-améliorer la situation, je prouve que les marchés des actifs ne sont pas Pareto-efficaces.

J'ai donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u^i = \textstyle\sum_s \mathrm{d}u^i_s &= \textstyle\sum_s \lambda^i_s(-z^i_s \mathrm{d}p_s + \mathrm{d}\tau^i_s) \\ &= \textstyle\sum_s \lambda^i_s(-z^i_s \mathrm{d}p_s + R_s \mathrm{d}y^i) \end{aligned}$$

Si je peux prouver que $\sum_i \mathrm{d}u^i = 0$, il est impossible, de Pareto-améliorer la situation.

Si les marchés sont complets, $\forall i, \lambda^i_s = \lambda_s$,

$$\sum_s \sum_i \lambda^i_s(-z^i_s \mathrm{d}p_s + R_s \mathrm{d}y^i) = \sum_s \lambda_i(-z^i_s \mathrm{d}p_s + R_s \mathrm{d}y^i_s) = 0$$

Comme la maximisation impose $\sum_s \lambda^i_s R_s = q$, $\sum_i \sum_s \lambda^i_s R_s \mathrm{d}y^i = 0$.

Si les marchés sont incomplets, $\sum_i \sum_s -\lambda^i_s z^i_s \mathrm{d}p_s$ n'a aucune raison d'être égal à 0. Mais comme les λ^i_s sont des variables endogènes, $\sum_i \sum_s -\lambda^i_s z^i_s \mathrm{d}p_s \to A\mathrm{d}y$, avec A de plein rang ligne.