Note sur les tests de racine unité

C. Doz

Mars 2003

On présente ci-dessous les principaux tests de racine unité dans la littérature. Dans les trois premiers paragraphes (tests de Dickey-Fuller, Phillips-Perron, Schmidt-Phillips) ; l'hypothèse nulle est l'hypothèse de non-stationnarité dans la série étudiée ; dans le dernier paragraphe, (tests KPPS), l'hypothèse nulle est celle de stationnarité

La présentation qui est donnée ici des tests de Dickey-Fuller et de Phillips-Perron s'inspire largement de celle de J.D. Hamilton, *Time Series Analysis*, Princeton University Press, 1994.

Il faut d'emblée signaler que les tests présentés ici sont peu puissants. Par ailleurs, les tests de Dickey-Fuller sont présentés en détail à cause de la place qu'ils tiennent dans la littérature, mais leur mise en œuvre pratique s'avère souvent problématique : nécessité de procéder à des tests emboîtés d'une part, cadre mal adapté aux séries présentant une tendance d'autre part. Dans ce dernier cas notamment, on leur préfère le test de Schmidt-Phillips.

Table des matières

1 Les Tests de Dickey-Fuller

Dans tous les modèles présentés ci-dessous, ε_t désigne un bruit blanc et ρ un réel tel que $|\rho| \leqslant 1$.

1.1 Le Cadre général des tests DF et ADF

Ces tests peuvent être regroupées en quatre cas :

Pour les Tests DF

1. $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$, avec $H_0 : \rho = 1$, marche aléatoire sans dérive ;
2. $y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$, avec $H_0 : \alpha = 0, \rho = 1$, marche aléatoire sans dérive ;
3. $y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$, avec $H_0 : \alpha \neq 0, \rho = 1$, marche aléatoire avec dérive ;
4. $y_t = \alpha + \beta t + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$, avec $H_0 : \alpha = 0, \beta = 0, \rho = 1$, marche aléatoire sans dérive, *ou* $H_{01} : \beta = 0, \rho = 1$, marche aléatoire avec dérive.

Pour les Tests ADF Soit $\Phi(L)$ polynôme de degré $p \geqslant 2$, dont les racines sont supposées de module supérieur à 1, et ayant au plus une racine égale à 1 :

$$\Phi(L) = \prod_{i=1}^{p}(1 - \lambda_i L)$$

avec éventuellement $\exists ! i_0 / \lambda_{i_0} = 1$ et $\forall i \neq i_0, |\lambda_i| < 1$.

D'où la réécriture des cas :

1. $\Phi(L)y_t = \varepsilon_t$, $H_0 : \Phi(1) = 0$;
2. $\Phi(L)y_t = \alpha + \varepsilon_t$, $H_0 : \Phi(1) = 0, \alpha = 0$;
3. $\Phi(L)y_t = \alpha + \varepsilon_t$, $H_0 : \Phi(1) = 0, \alpha \neq 0$;
4. $\Phi(L)y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$, $H_0 : \Phi(1) = 0, \alpha = 0, \beta = 0$, *ou* $H_{01} : \Phi(1) = 0, \beta = 0$.

L'écriture des quatre modèles ci-dessus peut être transformée en utilisant la démarche suivante :

On décompose $\Phi(L) = 1 - \varphi_1 L - \cdots - \varphi_p L^p$ sous la forme

$$\Phi(L) = \Phi(1) + (1 - L)\Phi^*(L) = \Phi(1) - (1 - L)\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i L^i$$

avec $\alpha_0 = -(\varphi_1 + \cdots + \varphi_p) = \Phi(1) - 1$ et $\forall 1 \leqslant i \leqslant p-1, \alpha_i = \alpha_{i-1} + \varphi_i = -(\varphi i + 1 \cdots + \varphi_p)$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
\Phi(L)y_t &= \Phi(1)y_t - \alpha_0 \Delta y_t - \textstyle\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta y_{t-i} \\
&= \Phi(1)y_t - (\Phi(1) - 1)(y_t - y_{t-1}) - \textstyle\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta y_{t-i} \\
&= y_t + (\Phi(1) - 1)y_{t-1} - \textstyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \Delta y_{t-i}
\end{aligned}$$

En posant $\rho = 1 - \Phi(1)$, on obtient :

1. $y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta y_{t-i} = \varepsilon_t, H_O : \rho = 1$
2. $y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta y_{t-i} = \varepsilon_t, H_O : \alpha = 0, \rho = 1$
3. $y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta y_{t-i} = \varepsilon_t, H_O : \alpha \neq 0, \rho = 1$
4. $y_t = \alpha + +\beta t \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta y_{t-i} = \varepsilon_t, H_O : \alpha = \beta = 0, \rho = 1$ ou $H_{O1} : \beta = 0, \rho = 1$

De plus, comme

$$\Phi(1) = \prod_{\lambda_i \in \mathbb{R}} (1 - \lambda_i) \prod_{\lambda_i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}} (1 - \lambda_i)(1 - \bar{\lambda_i}) > 0$$

on a, comme précédemment, $\rho \leqslant 1$.

Les tests DF apparaissent comme des cas particuliers des tests ADF, dans lesquels $p = 1$ et $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta y_{t-i} = 0$.

Tous ces modèles sont estimés par les MCO. Pour simplifier, on les écrit souvent sous la forme :

- Cas 1 :

$$\Delta y_t = \varphi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t, \varphi = \rho - 1$$

- Cas 2 et 3 :

$$\Delta y_t = \alpha + \varphi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

- Cas 4 :

$$\Delta y_t = \alpha + \beta t + \varphi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

1.2 Les Statistiques de tests et leurs lois

Les résultats sont les suivants :
- les $\widehat{\alpha}_i$ et les $t_{\widehat{\alpha}_i}$ ont des lois limites standard, même sous l'hypothèse de non-stationnarité, ce qui permet de fixer p par des tests de Fisher, et donc de partir avec p grand ;
- les coefficients qui caractérisent la nature stochastique de la série, $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\varphi} = \widehat{\rho} - 1$, ont les mêmes lois dans le cadre DF et ADF. Ces lois sont non standard, mais elles sont tabulées. On en donne la liste ci-dessous (*cf* tables en fin de document). Il faut noter que les lois asymptotiques sont valables quelle que soit la loi des ε_t, alors que les lois à distance finie sont valables seulement si les ε_t sont gaussiens.

1. $H_0 : \rho = 1 \Leftrightarrow H_0 : \varphi = 0$. On dispose des lois sous H_0 de :
   - $T\widehat{\varphi}_T = T_{\widehat{\rho}-1} \rightarrow$ table B5 cas 1 ;
   - $t_{\widehat{\varphi}_T} = t_{\widehat{\rho}-1} \rightarrow$ table B6 cas 1.

   N.B. : il s'agit d'un test unilatéral puisque $\rho \leqslant 1$. On rejette H_0 au seuil a si $T\widehat{\varphi}_T < c_a^1$ ou $t_{\widehat{\varphi}_T} < c_a^2$.
2. $H_0 : \alpha = 0, \rho = 1 \Leftrightarrow H_0 : \alpha = 0, \varphi = 0$. On dispose des lois sous H_0 de :
   - $T\widehat{\varphi}_T = T_{\widehat{\rho}-1} \rightarrow$ table B5 cas 2 ;
   - $t_{\widehat{\varphi}_T} = t_{\widehat{\rho}-1} \rightarrow$ table B6 cas 2 ;
   - $\widehat{\Phi}_1$, statistique de Fisher pour l'hypoyhèse : table IV ;
   - $t_{\widehat{\alpha}}$, statistique de Student associée à α : table I.
3. $H_0 : \alpha \neq 0, \rho = 1 \Leftrightarrow H_0 : \alpha \neq 0, \varphi = 0$. La loi limite sous H_0 de $t_{\widehat{\varphi}_T} = t_{\widehat{\rho}-1}$ est $\mathcal{N}(0, 1)$.
4. $H_0 : \alpha = 0, \beta = 0, \rho = 1 \Leftrightarrow H_0 : \alpha = 0, \beta = 0, \varphi = 0$ ou $H_{01} : \beta = 0, \rho = 1 \Leftrightarrow H_{01} : \beta = 0, \varphi = 0$.
   - *lois sous* H_0
     - $T\widehat{\varphi}_T = T_{\widehat{\rho}-1} \rightarrow$ table B5 cas 4 ;
     - $t_{\widehat{\varphi}_T} = t_{\widehat{\rho}-1} \rightarrow$ table B6 cas 4 ;
     - $\widehat{\Phi}_1$, statistique de Fisher pour l'hypohèse : table V ;
     - $t_{\widehat{\alpha}}$: table II ;
     - $t_{\widehat{\beta}}$: table III.
   - *lois sous* H_{01}
     - $T\widehat{\varphi}_T = T_{\widehat{\rho}-1} \rightarrow$ table B5 cas 4 ;
     - $t_{\widehat{\varphi}_T} = t_{\widehat{\rho}-1} \rightarrow$ table B6 cas 4 ;
     - $\widehat{\Phi}_1$, statistique de Fisher pour l'hypothèse : table VI ;

1.3 Mise en œuvre pratique des tests

On choisit d'abord entre les cadres donnés par le cas 2 ou le cas 4 suivant que le graphique présente une tendance (cas 4) ou non (cas 2).

On se place dans le cadre ADF en choisissant p suffisemment grand pour avoir $\varepsilon_t \sim \mathcal{BB}$. Puisque la loi des $\widehat{\alpha}_i$ est standard dans tous les cas, on commence par réduire (éventuellement) p en menant des tests de nullité des derniers retards (Fisher ou Student).

Cas 2 La difficulté de la construction d'une procédure rigoureuse de tests emboîtés provient du fait que la loi de $t_{\widehat{\rho}_T - 1} = t_{\widehat{\varphi}_T}$ dépend de la vraie valeur de α, qui est elle-même inconnue. Cependant, on peut remarquer que, pour un seuil de test donné, la valeur critique c_2^a associée à $t_{\widehat{\varphi}_T}$ dans le cas où $\alpha = 0$ est inférieure à la valeur critique c_3^a qui lui est associée quand $\alpha \neq 0$ (Cas 3). Par exemple, pour $T = +\infty$ et $a = 0,05$, cas valeurs critiques sont $c_2^a = -2,86$ et $c_3^a = -1,645$ (quantile à 5% de $\mathcal{N}(0,1)$.

On peut donc proposer la démarche suivante :

- Si $t_{\widehat{\varphi}_T} < c_2^a$, on rejette l'hypothèse $\rho = 1$ au seuil a, quelle que soit la vraie valeur de α ;
- Si $t_{\widehat{\varphi}_T} < c_3^a$, on accepte l'hypothèse $\rho = 1$ au seuil a, quelle que soit la vraie valeur de α (plus exactement, on ne rejette pas cette hypothèse). On peut ensuite mener un test de l'hypothèse jointe $H_0 : \alpha = 0, \rho = 1$ en utilisant la statistique $\widehat{\Phi}_1$ et la valeur critique k_2^a associée (table IV :
  - si $\widehat{\Phi}_1 < k_2^a$, on accepte H_0 au seuil a ;
  - si $\widehat{\Phi}_1 < k_2^a$, on refuse H_0, donc on condidère que le vrai modèle est celui du cas 3.

  Par exemple, pour $T = +\infty$ et $a = 0,05$, $k_2^a = 4,59$.
- Si $c_2^a < t_{\widehat{\varphi}_T} < c_3^a$, on ne peut rien conclure au vu de la statistique $t_{\widehat{\varphi}_T}$. On mêne donc le test de l'hypothèse jointe $H_0 : \alpha = 0, \rho = 1$.
  - si $\widehat{\Phi}_1 < k_2^a$, on accepte H_0 au seuil a ;
  - si $\widehat{\Phi}_1 < k_2^a$, on refuse H_0 au seuil a ; on se trouve vraisemblablement dans le cas où $\alpha \neq 0$ et $\rho < 1$; ceci peut être contrôlé en examinant la statistique de Student associée à α.

Cas 4 Le problème est ici que les lois limites ne sont connues que lorsque $\beta = 0$, alors que la vraie valeur de β est inconnue. Ceci provient du fait que le modèle est mal adapté au cas de séries présentant une tendance déterministe linéaire, comme on le verra ci-dessous. On choisira donc plutôt, dans ce cas, de recourir au test de Schmidt-Phillips.

Dans le cadre des tests de Dickey-Fuller, la seule procédure de tests emboîtés qui puisse être proposée est la suivante :

- si $\widehat{\Phi}_3 < k_3^a$ (table VI), on accepte l'hypothèse $H_{01} : (\beta = 0, \rho = 1)$ au seuil a, quelle que soit la vraie valeur de α. Par exemple, pour $T = +\infty$, $a = 0,05$, $k_3^a = 6,25$. On teste ensuite l'hypothèse $H_0 : (\alpha = 0, \beta = 0, \rho = 1)$ à l'aide de la statistique $\widehat{\Phi}_2$:
  - si $\widehat{\Phi}_2 < k_4^a$ (table V), on accepte H_0 ;
  - si $\widehat{\Phi}_2 > k_4^a$, on refuse H_0.
- si $\widehat{\Phi}_3 > k_3^a$, on refuse H_{01}, et donc aussi H_0.

2 Les Tests de Phillips-Perron

L'idée sous-jacente aux tests ADF est qu'en remplaçant les modèles du cadre DF :

$$\Delta y_t = d_t + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t, \begin{cases} d_t = 0 & \text{cas 1} \\ d_t = \alpha & \text{cas 2 et 3} \\ d_t = \alpha + \beta t & \text{cas 4} \end{cases}$$

par des modèles du type :

$$\Delta y_t = d_t + \varphi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

On peut toujours choisir p assez grand pour conserver l'hypothèse de bruit blanc sur ε_t. Ceci entraîne que les lois limites des estimateurs des paramètres caractérisant la nature stochastique de la série sont identiques à celles du cadre DF.

Phillips et Perron ont proposé une autre façon de traiter l'autocorrélation éventuelle du processus (Δy_t). Les modèles considérés ont la même forme que ceux du cadre DF :

$$\Delta y_t = d_t + \varphi y_{t-1} + u_t$$

mais on admet la possibilité que les u_t soient autocorrélés. Les auteurs montrent que, sous réserve d'introduire un terme correctif adapté, les lois des statistiques $T\widehat{\varphi}_T = T_{\widehat{\rho}_T - 1}$ et $t_{\widehat{\varphi}_T} = t_{\widehat{\rho}_T - 1}$ sont asymptotiquement identiques à celles qui sont observées dans le cadre DF. Ces termes correctifs sont fondés sur des estimateurs convergents de $\sigma_u^2 = \gamma_u(0)$ et de $\omega^2 = 2\pi f_u(0)$, c'est-à-dire :

$$\omega^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_u(k) = \lim_T V \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} u_t \right)$$

Ces estimateurs sont calculés comme suit :

- on estime le modèle par les MCO et on calcule les résidus estimés $\widehat{u_t}$;
- On pose :

  $$\forall k \geqslant 0, \widehat{\gamma}_u(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^{T} \widehat{u}_t \widehat{u}_{t-k}$$

  et

  $$\widehat{\omega}_{TK}^2 = \widehat{\gamma}_u(0) + 2 \sum_{k=1}^{K} \left(1 - \frac{k}{K+1} \right) \widehat{\gamma}_u(k)$$

  avec K suffisemment grand (estimateur de Newey-West). En général, on choisit K de l'ordre de $\sqrt{T}$.

Pour les différentes valeurs possibles de d_t ($d_t = 0, d_t = \alpha, d_t = \alpha + \beta t$), on obtient des lois identiques à celles du cadre DF en remplaçant :

- $T\widehat{\varphi}_T = T_{\widehat{\rho}_T - 1}$ par :

  $$T\widehat{\varphi}_T - \frac{1}{2} T^2 \frac{\widehat{\sigma^2_{\widehat{\varphi}_T}}}{\widehat{\sigma^2_u}} (\widehat{\omega}_{TK}^2 - \widehat{\gamma}_0)$$

- $t_{\widehat{\varphi}_T} = t_{\widehat{\rho}_T - 1}$ par :

  $$\sqrt{\frac{\widehat{\gamma}_0}{\widehat{\omega}_{TK}^2}} t_{\widehat{\varphi}_T} - \frac{1}{2} T \frac{\widehat{\sigma}^2_{\widehat{\varphi}_T}}{\widehat{\sigma}^2{}_u} \frac{(\widehat{\omega}_{TK}^2 - \widehat{\gamma}_0)}{\widehat{\omega}_{TK}}$$

3 Le Test de Schmidt-Phillips

Le problème posé par le cas 4 des tests DF et ADF est que les paramètres n'ont pas la même interprétation sous l'hypothèse nulle et sous l'hypothèse alternative. Considérons en effet le modèle : $y_t = \alpha + \beta t + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$ et l'hypothèse : $H_{01} : \beta = 0, \rho = 1$.

– Sous l'hypothèse alternative, on a :

$$
\begin{array}{l}
(1-\rho L)y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t \Leftrightarrow y_t = (1-\rho L)^{-1}(\alpha + \beta t + \varepsilon_t) \\
\Leftrightarrow y_t = \frac{\alpha}{1-\rho} + \beta\left(t - \rho(t-1)\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \varepsilon_{t-k} \\
\Leftrightarrow y_t = a + bt + u_t \text{ avec } b = \beta(1-\rho), a = \beta\rho + \frac{\alpha}{1-\rho} \\
u_t = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \varepsilon_{t-k} \sim I(0)
\end{array}
$$

– Sous l'hypothèse H_{01}, on a :

$$
y_t = y_0 + \alpha t + \sum_{k=0}^{t} \varepsilon_{t-k}
$$

Donc, sous H_a, y_t est stationnaire autour d'une tendance déterministe de pente $b = \beta(1-\rho)$, et sous H_{01}, y_t est non stationnaire autour d'une tendance déterministe de pente α.

La formulation du modèle n'est donc pas satisfaisante. Schmidt et Phillips ont proposé un modèle et un test beaucoup mieux adapté au cas des séries présentant une tendance. Dans ce modèle, on suppose que $y_t = \alpha + \beta t + u_t$, avec (u_t) non stationnaire sous H_0 et (u_t) stationnaire sous H_1.

3.1 Méthode de test pour le modèle de base

Dans le modèle de base, on suppose que :

$$
\begin{array}{l}
y_t = \alpha + \beta t + u_t \\
u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \text{ avec } |\rho| \leqslant 1, \varepsilon_t \sim \mathcal{BB}(0, \sigma^2)
\end{array}
$$

On pose : $H_0 : \rho = 1$.
On calcule :

$$
\widehat{\beta} = \frac{y_T - y_1}{T-1}, \widehat{\alpha} = y_1 - \widehat{\beta}, \widehat{u_t} = y_t - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}t
$$

Comme le modèle s'écrit aussi :

$$
\Delta y_t = b + u_t - u_{t-1} = b + (\rho - 1)u_{t-1} + \varepsilon_t = b + \varphi u_{t-1} + \varepsilon_t
$$

on estime par les MCO le modèle : $\Delta y_t = \mu + \varphi \widehat{u}_{t-1} + \eta_t$ et on teste : $H_0 : \varphi = 0$ contre $H_1 : \varphi < 0$. Soit $\widehat{\varphi}_T$ l'estimateur des MCO deφ, et $t_{\widehat{\varphi}_T}$ la statistique de Student associée, on refuse H_0 au seuil a si $T_{\widehat{\varphi}_T} = T_{\widehat{\rho}_T - 1} < c_a$ ou si $t_{\widehat{\varphi}_T} < c_a^1$ avec c_a et c_a^1 obtenus dans la table 1A (par exemple, pour $T = 100$, $a = 0,05$: $c_a = -3,04$).

3.2 Cas général

On suppose toujours :

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
y_t & = & \alpha + \beta t + u_t \\
u_t & = & \rho u_{t-1} + \varepsilon_t
\end{array}
\right.
$$

mais on ne fait plus l'hypothèse que (ε_t) est un $\mathcal{BB}$. On effectue le même type de correction que dans le test de Phillips-Perron pour prendre en compte l'autocorrélation éventuelle des ε_t. La procédure de test proposée par les auteurs est cependant un peu différente de la précédente. Tenant compte du fait que :

$$\begin{aligned}(1-\rho L)y_t &= (1-\rho L)(\alpha+\beta t)+(1-\rho L)u_t \\ &= a+bt+\varepsilon_t\end{aligned}$$

ils estiment directment le modèle :

$$\Delta y_t = a + bt + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

par les MCO, et calculebt $\widehat{\sigma_\varepsilon^2}$ et $\widehat{\omega}_{KT}^2$ pour les résidus $\widehat{\varepsilon}_t$ comme cela a été fait pour $\widehat{u}_t$ au paragraphe 2, et $\lambda^2 = \frac{\widehat{\sigma_\varepsilon^2}}{\widehat{\omega}_{KT}^2}$.

On reprend ensuite la démarche exposée au 3.1 pour calculer $\widehat{\varphi}_T = \widehat{\rho}_T - 1$ et $t_{\widehat{\varphi}_T}$. Les auteurs montrent que les lois limites de $\frac{T_{\widehat{\varphi}_T}}{\lambda^2}$ et $\frac{t_{\widehat{\varphi}_T}}{\lambda^2}$ sont identiques respectivement aux lois obtenues pour $T_{\widehat{\varphi}_T}$ et $t_{\widehat{\varphi}_T}$ au 3.1.

4 Le Test KPSS (Kwiotowski, Phillips, Schmidt, Shin)

Comme on l'a dit en introduction, l'hypothèse nulle de ce test est celle de la stationnarité (autour d'une constante ou d'une tendance déterministe linéaire), contrairement à tous les cas précédents. Deux cas sont donc étudiés :

1. $y_t = r_t + \varepsilon_t$ où $\varepsilon_t \sim I(0)$, $r_t = r_{t-1} + u_t$, $u_t \sim \mathcal{BB}(O, \sigma_u^2)$
2. $y_t = \beta t + r_t + \varepsilon_t$ avec $\varepsilon_t \sim I(0)$, $r_t = r_{t-1} + u_t$, $u_t \sim \mathcal{BB}(O, \sigma_u^2)$

La statistique de test utilisée correspond à la statistique du test du score lorsque les ε_t sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$. Cependant, elle est corrigée de façon à tenir compte de l'autocorrélation des ε_t dans le cas général.

La procédure employée est alors la suivante :

- on régresse y_t sur une constante (cas 1) ou sur une constante et un trend (cas 2) et on calcule les résidus $\widehat{u}_t$ de la régression ($\widehat{u}_t = y_t - \bar{y}$ dans le cas 1, $\widehat{u}_t = y_t - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} t$ dans le cas 2) ;
- on calcule :

  $$\widehat{S}_t = \sum_{k=1}^{t} \widehat{u}_k$$

  et

  $$\widehat{\omega}_{TK}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\widehat{u}_t^2 + 2\sum_{k=1}^{K}\left(1-\frac{k}{K+1}\right)\frac{1}{T}\sum_{t=k+1}^{T}\widehat{u}_t\widehat{u}_{t-k}$$

  avec K de l'ordre de $\sqrt{T}$.
- la statistique de test est :

  $$\eta = \frac{\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\widehat{S}_t^2}{\widehat{\omega}_{TK}^2}$$

La loi limite de *eta* est tabulée dans le cas 1 (η_μ dans la table) et dans le cas 2 (η_τ dans la table).

On refuse $H_0 : \sigma_u^2 = 0$ au seuil α lorsque la valeur obtenue de η est supérieure à la valeur critique correspondante.