Prévisions dans les ARMA et les ARIMA

Inspiré du cours de C. Doz

Mars 2003

Introduction

On suppose $X_t \sim$ ARMA : $\Phi(L)X_t = \mu + \theta(L)$ canonique minimal. On est à la date t et on cherche les meilleurs prévisions possibles pour $(x_{t+1}, \ldots, x_{t+h})$, prévision à l'ordre h.

- prévision optimale de x_{t+h} à la date t : $\mathbb{EL}(x_{t+h}|\underline{x_t})$;
- approximation de cette prévision : je ne connais en effet pas les x_t jusqu'à $t = -\infty$.

On suppose que les coefficients de Φ et de θ, ainsi que μ sont connus. En pratique, ils seront remplacés par leurs estimateurs.

Remarque : un problème particulier est celui de la mise à jour : ayant fait mes prévisions en t, comment les réutiliser quand je suis en $t+1$. Voir le Gourrieroux-Montfort.

Définition 1 (Fonction de prévision). C'est la fonction qui, à la date t, associe à h la prévision optimale de $x_{t+h} = \mathbb{EL}(x_{t+h}|\underline{x_t})$.

Table des matières

1 Prévision dans un AR(p)

Notation 1.1 (prévision optimale). On note : ${}_t x^*_{t+h} = \mathbb{EL}(x_{t+h}|\underline{x_t})$

Soit : $x_t = \mu + \varphi_1 x_{t-1} + \cdots + \varphi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$ canonique. On a :

– Au rang 1 :

$$x_{t+1} = \mu + \varphi_1 x_t + \cdots + \varphi_p x_{t+1-p} + \varepsilon_{t+1}$$

$${}_t x^*_{t+1} = \mathbb{EL}(x_{t+1}|\underline{x_t}) = \mu + \varphi_1 x_t + \cdots + \varphi_p x_{t+1-p}$$

Cette prévision est calculable à partie des observations.

– Au rang 2 :

$$x_{t+2} = \mu + \varphi_1 x_{t+1} + \cdots + \varphi_p x_{t+2-p} + \varepsilon_{t+2}$$

$${}_t x^*_{t+2} = \mathbb{EL}(x_{t+2}|\underline{x_t}) = \mu + \varphi_1 {}_t x^*_{t+1} + \cdots + \varphi_p x_{t+2-p}$$

– Au rang h :

$$x_{t+h} = \mu + \varphi_1 x_{t+h-1} + \cdots + \varphi_p x_{t+h-p} + \varepsilon_{t+h}$$

$${}_t x^*_{t+h} = \mu + \sum_{k=1}^{h-1} \varphi_k {}_t x^*_{t+k} + \sum_{k=h}^{p} \varphi_k x_{t+h-k}$$

Cette prévision s'obtient donc par itérations successives.

Notation 1.2.

$$\begin{aligned} x_t &= \mu + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k x_{t-k} + \varepsilon_t \\ x_{t+h} &= \mu + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k x_{t+H-k} + \varepsilon_{t+h} \\ {}_t x^*_{t+h} &= \mu + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k {}_t x^*_{t+H-k} \text{ avec } {}_t x^*_{t+h-k} = x_{t+h-k} \text{ si } k \geqslant h \end{aligned}$$

On peut aller plus vite si on sait résoudre les équations de récurrence :

$$\Phi(L)x_t = \mu + \varepsilon_t \Leftrightarrow \Phi(L)(x_t - m) = \varepsilon_t \qquad \mu = \frac{m}{\Phi(1)}$$

On pose : $y_t = (x_t - m)$, et on a : ${}_t y^*_{t+h} = {}_t x^*_{t+h} - m$.

$$\Phi(L)y_{t+h} = \varepsilon_{t+h} \Rightarrow \Phi(L)_t\, y^*_{t+h} = 0 \text{ avec la notation (1.2)}$$

D'où l'équation de récurrence d'ordre p :

$$\Phi(L)_t\, y^*_{t+h} = {}_t y^*_{t+h} - \sum k = 1^p \varphi_k {}_t y^*_{t+h-k} = 0$$

Son polynôme caractéristique est $z^p \Phi\left(\frac{1}{z}\right)$. On obtient ainsi les ${}_t y^*_{t+h}$ à partir de la forme générale de la solution, les y_t fournissant les conditions initiales.

Exemple 1.1.

$$(1-\varphi L)x_t = \mu + \varepsilon_t \Leftrightarrow (1-\varphi L)(x_t - m) = \varepsilon_t$$

On pose $y_t = x_t - m$, et on a alors : $(1-\varphi L)_t\, y^*_{t+h} = 0 \Leftrightarrow {}_t\, y^*_{t+h} = \varphi_t\, y^*_{t+h-1}$, d'où la solution générale : ${}_t\, y^*_{t+h} = \varphi^h y_t$.

Donc : ${}_t\, x^*_{t+h} = m + \varphi^h(x_t - m)$

On ne va certes pas beaucoup plus vite qu'avec une récurrence ici, mais avec des polynômes plus complexes, cette méthode peut être bien plus rapide.

Exemple 1.2.

$$(1-\varphi L)^2 x_t = \varepsilon_t \Rightarrow (1-\varphi L)^2\, {}_t\, x^*_{t+h} = 0$$

D'où une solution générale de la forme : $\varphi^p(ah+b)$.

On détermine les coefficients en utilisant les conditions initiales :

- $h = 0 : b = x_t$;
- $h = 1 : \varphi(a+b) = {}_t\, x^*_{t+1} = 2\varphi x_t + \varphi x_{t-1} \rightarrow$ sachant b, on a : $a = x_t - \varphi x_{t-1}$.

Ainsi : ${}_t\, x^*_{t+h} = \varphi^h\left((h+1)x_t - \varphi h x_{t-1}\right)$

2 Prévision dans un MA(q)

$$x_t = m + \theta(L)\varepsilon_t = m + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon t - 1 - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Cas $\mathbf{h > q}$

$$x_{t+h} = m + \varepsilon_{t+h} - \theta_1 \varepsilon_{t+h-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t+h-q}$$

avec $t+h > t+h-1 > \cdots > t+h-q > t$.

D'où : ${}_t\, x^*_{t+h} = \mathbb{EL}(x_{t+h}|\underline{x_t}) = \mathbb{EL}(m + \varepsilon_{t+h} - \theta_1 \varepsilon_{t+h-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t+h-q})$ et donc :

$${}_t\, x^*_{t+h} = m$$

Cas $\mathbf{h \leqslant q}$

$$\begin{aligned}
{}_t\, x^*_{t+h} &= \mathbb{EL}(x_{t+h}|\underline{x_t}) \\
&= \mathbb{EL}(m + \varepsilon_{t+h} - \theta_1 \varepsilon_{t+h-1} - \cdots - \theta_h \varepsilon_t - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t+h-q}|\underline{x_t}) \\
&= m + 0 - \theta_h \varepsilon_t - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t+h-q}
\end{aligned}$$

Cette forme théorique est inutilisable dans la pratique, faute de pouvoir observer les ε_t. On va donc utiliser la forme $AR(\infty)$:

$\theta(L)^{-1}(x_t - m) = \varepsilon_t \Rightarrow \theta(L)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k, a_0 = 1, \sum |a_k| < \infty$, donc $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_{t-k} - \mu + \varepsilon_t \Leftrightarrow x_t = \mu - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_{t-k} + \varepsilon_t$, où $\mu = \frac{m}{\theta(1)}$.

D'où :

- $h = 1$:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \mu - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_{t-k+1} + \varepsilon_{t+1} \\ {}_t x^*_{t+1} &= \mu - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_{t-k+1} + 0 \end{aligned}$$

- $h = 2$

$$\begin{aligned} x_{t+2} &= \mu - a_1 x_{t+1} - \sum_{k=2}^{+\infty} a_k x_{t-k+2} + \varepsilon_{t+2} \\ {}_t x^*_{t+2} &= \mu - a_1 {}_t x^*_{t+1} - \sum_{k=2}^{+\infty} a_k x_{t-k+2} + 0 \end{aligned}$$

- Cas général :

$$\begin{aligned} x_{t+h} &= \mu - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_{t-k-h} + \varepsilon_{t+h} \\ {}_t x^*_{t+h} &= \mu + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k {}_t x^*_{t+h-k} + 0 \text{ avec la notation (1.2)} \\ {}_t x^*_{t+h} &= \mu - \sum_{k=1}^{h-1} a_k {}_t x^*_{t+h-k} - \sum_{k=h}^{+\infty} a_k x_{t+h-k} \end{aligned}$$

Pour $h \leqslant q$, on peut s'intéresser à la prévision approchée. En effet, je n'observe pas les x_s pour un nombre fini de périodes (je ne peux donc jamais remonter jusqu'à l'infini). On calcule donc une approximation ${}_t\widehat{x}_{t+h}$ n'utilisant que les valeurs observées de x_{t-k}.

Exemple 2.1.

$${}_t x^*_{t+1} = \mu - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_{t+1-k} = \underbrace{\mu - \sum_{k=1}^{t} a_k x_{t+1-k}}_{={}_t\widehat{x}_{t+1}} - \underbrace{\sum_{k=t+1}^{+\infty} x_{t+1-k}}_{\text{non observé}}$$

Erreur de prévision Quelle erreur commet-on en considérant ${}_t\widehat{x}_{t+1}$ au lieu de ${}_t x^*_{t+1}$?

$$\left\| \sum_{k=t+1}^{+\infty} a_k x_{t+1-k} \right\|_2 \leqslant \sum_{k=t+1}^{+\infty} |a_k| \|x_{t+1-k}\|_2 \leqslant \left(\gamma(0) + m^2\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=t+1}^{+\infty} |a_k|$$

En effet, $\|x_t\|_2^2 = \mathbb{E}(x_t^2) = \gamma(0) + m^2$. Or, $dsum_{k=t+1}^{+\infty} |a_k| \overset{t\to+\infty}{\longleftarrow} 0$. D'où le résultat.

Pour ${}_t\widehat{x}_{t+h}$:

$${}_t x^*{}_{t+h} = \mu + \sum_{k=1} t + h - 1 a_k {}_t x^*{}_{t+h-k} - \sum_{k=t+k}^{+\infty} a_k x_{t+h-k}$$

Définition 2. On définit donc ${}_t\widehat{x}_{t+h}$ comme :

$$\begin{aligned}
{}_t\widehat{x}_{t+h} &= \mu - \sum_{k=1} t+h-1 a_{k\,t}\widehat{x}_{t+h-k} \\
&= \mu - \sum_{k=1}^{h-1} a_{k\,t}\widehat{x}_{t+h-k} - \sum_{k=h}^{t+h-1} a_k x_{t+h-k}
\end{aligned}$$

3 Prévision pour un ARMA(p, q)

3.1 Prévision optimale

On utilise la forme AR(∞) :

$$\begin{array}{l}
\Phi(L)x_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t \\
\Phi(L)(x_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t \\
\theta(L)^{-1}\Phi(L)(x_t - \mu) = \varepsilon_t \\
\theta(L)^{-1}\Phi(L)(x_t) = \mu_0 + \varepsilon_t \qquad \mu_0 = \frac{\mu}{\theta(1)}
\end{array}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_{t-k} = \mu_0 + \varepsilon_t \Leftrightarrow x_t = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_{t-k} + \mu_0 + \varepsilon_t$$

On va donc faire comme dans le cas d'un $MA(q)$, sauf que les prévisions ne seront pas constantes à partir d'un certain rang :

$${}_t{x^*}_{t+h} = \mu_0 - \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k\,t}{x^*}_{t+h-k} = \mu_0 + \sum_{k=1}^{h-1} a_{k\,t}{x^*}_{t+h-k} - \sum_{k=h}^{+\infty} a_k x_{t+h-k}$$

La prévision optimale se calcule de manière itérative.

3.2 Prévision approchée

De même que pour le MA(q), si $s > 0$,

$$\begin{aligned}
{}_t\widehat{x}_{t+h} &= \mu_0 - \sum_{k=1}^{t+h} a_{k\,t}\widehat{x}_{t+h-k} \\
&= \mu_0 - \sum_{k=1}^{h-1} a_{k\,t}\widehat{x}_{t+h-k} - \sum_{k=h}^{t+h} a_k x_{t+h-k}
\end{aligned}$$

On le calcule par itérations sur h.

3.3 Équation de récurrence

$\Phi(L)(x_t - m) = \theta(L)\varepsilon_t \qquad m = \frac{\mu}{\Phi(1)}$

$\Phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t \Leftrightarrow y_t = -(\varphi_1 y_{t-1} + \cdots + \varphi_p y_{t-p}) + \varepsilon_t - (\theta_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q})$

Si $h \geqslant q$,

$$y_{t+h} = -\varphi_1 y_{t+h-1} - \cdots - \varphi_p y_{t+h-p} + \varepsilon_t + \varepsilon_{\underbrace{t+h}_{>t}} - \theta_1\varepsilon_{\underbrace{t+h-1}_{>t}} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{\underbrace{t+h-q}_{>t}}$$

Donc,

$$\begin{aligned}&{}_t{y^*}_{t+h} = \mathbb{EL}(y_{t+h}|\underline{y_t}) = \mathbb{EL}(x_{t+h}|\underline{x_t})\\ &\Rightarrow {}_t{y^*}_{t+h} = -\varphi_1 {}_t{y^*}_{t+h-1} - \cdots - \varphi_p {}_t{y^*}_{t+h-p} + 0\end{aligned}$$

Les ${}_t{y^*}_{t+h}$ vérifient donc l'équation de récurrence : $\Phi(L)({}_t{y^*}_{t+h}) = 0$ de polynôme cractéristique $z_p\Phi(\frac{1}{z})$. Pour $h > q$, on connaît la forme générale de ${}_t{y^*}_{t+h}$ en fonction de h. Ils peuvent être explicités avec p conditions initiales (observations ou prévisions). On a donc ${}_t{x^*}_{t+h} = {}_t{y^*}_{t+h} + m$.

On peut montrer par ailleurs que pour $h > q$, les ${}_t\widehat{y}_{t+h}$ vérifient la même équation de récurrence.

4 Prévision pour un ARIMA(p, d, q)

$$\begin{array}{rrcl} & (1-L)^d\Phi(L)x_t & = & \mu + \theta(L)\varepsilon_t \\ \Leftrightarrow & \psi(L)x_t & = & \mu + \theta(L)\varepsilon_t \\ \Leftrightarrow & \psi(L)(x_t - m_t) & = & \theta(L)\varepsilon_t \\ \Leftrightarrow & \psi(L)y_t & = & \theta(L)\varepsilon_t \end{array}$$

avec $m_t = \mathbb{E}(x_t)$.

4.1 Prévision optimale

Une prévision optimale de x_{t-h} sera de la forme (prévision de $y_{t+h} + m_{t+h}$).

Pour les ARIMA, on a vu qu'on devait se donner les conditions initiales : $Z = (1, x_0, \ldots, x_{-p-d+1}, \varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{-q+1})$.

On a alors :

$${}_t{y^*}_{t+h} = \mathbb{EL}(y_{t+h}|y_t, \ldots, y_1, Z)$$

Approximaion AR :

$$y_t = -\sum_{j=1}^{t-1} a_j y_{t-j} + g'(t)Z \qquad \text{avec } \lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$$

Approximation MA :

$$y_t = \sum_{j=0}^{t-1} b_j \varepsilon_{t-j} - \tilde{g}'(t)Z \qquad \text{avec } \lim_{t\to+\infty} \tilde{g}(t) = 0$$

On montre que $\mathcal{L}(y_t, \ldots, y_1, Z) = \mathcal{L}(\varepsilon_t, \ldots, \varepsilon_1, Z)$

On a alors :

$$\begin{array}{rcl} y_{t+h} & = & -\displaystyle\sum_{j=1}^{t+h-1} a_j y_{t+h-j} + g'(t+h)Z \\ {}_t{y^*}_{t+h} & = & \mathbb{EL}(y_{t+h}|y_t, \ldots, y_1, Z) \\ & = & -\displaystyle\sum_{j=1}^{t+h-1} a_j {}_t{y^*}_{t+h-j} + g'(t+h)Z \end{array}$$

On retrouve ainsi un calcul itératif, problématique car il faudrait calculer explicitement g.

4.2 Prévision approchée

On définit la prévision approchée comme :

$$_t\widehat{y}_{t+h} = -\sum_{j=1}^{t+h-1} a_{j\,t}\widehat{y}_{t+h-j}$$

En effet, $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$.

On peut donc également le calculer par itération sur h.

4.3 Equation de récurrence

$$\begin{array}{rcl} \psi(L)y_t & = & \theta(L)\varepsilon_t \\ \psi(L)y_t & = & \varepsilon_{t+h} - \theta_1\varepsilon_{t+h-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t+h-q} \end{array}$$

Donc, si $h > q, \psi_t y*_{t+h} = 0$. Les $_ty^*{}_{t+h}$ sont solution de l'équation de récurrence dont le polynôme caractéristique est $z^{p+d}\frac{1}{z}$, ce qui permet de les exprimer en fonction de h. On peut remarquer que 1 est racine à l'ordre d de ce polynôme. $_ty^*{}_{t+h}$ est ainsi déterminé si on se donne $p+d$ conditions initiales.

On montre de même que les $_t\widehat{t}_{t+h}$ vérifient la même équation de récurrence.

5 Mise à jour des prévisions

La modélisation multivariée prenant de plus en plus d'importance, il est inutile de connaître toutes les subtilités de l'univariés. Pour caux que cela intresse, cf. Montfort-Gourrieroux.

6 Intervalles de prévision

6.1 Erreur de prévision

Définition 3 (Erreur de prévision). On définit l'erreur de prévision à l'horizon h comme :

$$e_t(h) = x_{t+h} - {}_tx^*{}_{t+h}$$

Il va s'agir d'exprimer l'erreur de prévision en fonction des ε_s.

Cas MA(q)

– Si $h > q$,

$$\begin{array}{rcl} _tx^*{}_{t+h} & = & m \\ x_{t+h} & = & m + \varepsilon_{t+h} - \theta_1\varepsilon_{t+h-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t+h-q} \\ \Rightarrow e_t(h) & = & \varepsilon_{t+h} - \theta_1\varepsilon_{t+h-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t+h-q} \end{array}$$

– Si $h \leqslant q$,

$$\begin{array}{rcl} x_{t+h} & = & m + \varepsilon_{t+h} - \theta_1\varepsilon_{t+h-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t+h-q} \\ _tx^*{}_{t+h} & = & m - \theta_h\varepsilon_t - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t+h-q} \\ \Rightarrow e_t(h) & = & \varepsilon_{t+h} - \theta_1\varepsilon_{t+h-1} - \cdots - \theta_{h-1}\varepsilon_{t+1} \end{array}$$

Cas AR(p) ou ARMA(p,q)

$$\Phi(L)x_t = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$$

La prévision optimale a été calculée en utilisant la forme AR ; on peut aussi calculer l'erreur en utilisant une forme MA(∞) :

$$x_t = m + \Phi(L)^{-1}\theta(L)\varepsilon_t = m + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k\varepsilon_{t-k}, m = \frac{\mu}{\Phi(1)}, b_0 = 1, \quad \sum |b_k| < +\infty$$

$$\begin{aligned} x_{t+h} &= m + \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\varepsilon_{t+h-k} \\ {}_tx^*{}_{t+h} &= m + \textstyle\sum_{k=h}^{+\infty} b_k\varepsilon_{t+h-k} \\ e_t(h) &= \textstyle\sum_{k=0}^{h-1} b_k\varepsilon_{t+h-k} \end{aligned}$$

Cas ARIMA(p,d,q) $\psi(L) = \mu + \theta(L)\varepsilon_t$, avec $\psi(L) = (1-L)^d\Phi(L)$. On pose $y_t = x_t - \mathbb{E}(x_t)$, d'où $\psi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t$.

On utilise une approximation MA :

$$\begin{aligned} y_t &= \sum_{j=0}^{t-1} b_j\varepsilon_{t-j} + \tilde{g}(t)'Z \\ y_{t+h} &= \sum_{j=0}^{t+h-1} b_j\varepsilon_{t+h-j} + \tilde{g}(t+h)'Z \\ {}_ty^*{}_{t+h} &= \mathbb{EL}(y_{t+h}|y_t,\ldots,y_1,Z) \\ &= \sum_{j=h}^{t+h-1} b_j\varepsilon_{t+h-j} + \tilde{g}(t+h)'Z \\ \Rightarrow e_t(h) &= x_{t+h} - {}_tx^*{}_{t+h} = y_{t+h} - {}_ty^*{}_{t+h} \\ \Rightarrow e_t(h) &= \sum_{j=0}^{h-1} b_j\varepsilon_{t+h-j} \end{aligned}$$

C'est la même forme que précédemment.

6.2 Intervalle de prévision

Donc, dans tous les cas,

$$e_t(h) = \sum_{j=0}^{h-1} b_j\varepsilon_{t+h-j}$$

On a alors :

$$\mathbb{V}(e_t(h)) = \sigma^2\sum_{j=0}^{h-1} b_j^2$$

Sous une hypothèse de normalité des (ε_t), on a $e_t(h) =\sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\sum_{j=0}^{h-1} b_j^2\right)$, où les b_j sont des fonctions connues des paramètres du modèle. En pratique, si les paramètres $(\widehat{\mu}, \widehat{\varphi}_1, \ldots, \widehat{\varphi}_p, \widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_q, \widehat{\sigma}^2)$ sont estimés, on peut calculer les $\widehat{b}_j^2$

associés. Commes les estimateurs des paramètres sont convergents, les $\widehat{b}_j^2$ le sont aussi.

On a donc une loi théorique :

$$\frac{x_{t+h} - {}_t x^*{}_{t+h}}{\sigma\sqrt{\sum_{j=1}^{h-1} b_j^2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Comme les estimateurs sont convergents,

$$\frac{x_{t+h} - {}_t x^*{}_{t+h}}{\widehat{\sigma}\sqrt{\sum_{j=1}^{h-1} \widehat{b}_j^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

D'où les intervalles de prévision au niveau $1-\alpha$,

– Théorique :

$$\left[{}_t x^*{}_{t+h} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{\sum_{j=1}^{h-1} b_j^2} ; {}_t x^*{}_{t+h} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\sqrt{\sum_{j=1}^{h-1} b_j^2} \right]$$

– Estimé :

$$\left[{}_t x^*{}_{t+h} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\widehat{\sigma}\sqrt{\sum_{j=1}^{h-1} \widehat{b}_j^2} ; {}_t x^*{}_{t+h} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\widehat{\sigma}\sqrt{\sum_{j=1}^{h-1} \widehat{b}_j^2} \right]$$

– En pratique, on néglige $\mathbb{V}({}_t\widehat{x}_{t+h} - {}_t x^*{}_{t+h})$, qui tend vers 0, donc :

$$\left[{}_t\widehat{x}_{t+h} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\widehat{\sigma}\sqrt{\sum_{j=1}^{h-1} \widehat{b}_j^2} ; {}_t\widehat{x}_{t+h} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\widehat{\sigma}\sqrt{\sum_{j=1}^{h-1} \widehat{b}_j^2} \right]$$